

1. а) Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует гамильтонов путь.

б) Докажите, что в любом сильносвязном полном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.

2. **Признак Дирака.** а) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

б) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

3. **Признак Оре.** а) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем n . Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

б) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем $n - 1$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

4. Какое максимальное число рёбер может быть в графе на n вершинах, в котором нет гамильтонова пути?

5. В танцевальном кружке занимаются 27 мальчиков и 27 девочек. Известно, что каждый мальчик знает по крайней мере 14 девочек, а каждая девочка знает хотя бы 14 мальчиков (знакомства взаимны). Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли две его знакомые девочки.

6. а) Какое наименьшее число рёбер может быть в графе на n вершинах, в котором при удалении любого ребра существует гамильтонов цикл?

б) Какое наименьшее число рёбер может быть в графе на n вершинах, если для любых вершин A и B существует гамильтонов путь с началом в A и концом в B ?

7. Есть 2020 непересекающихся групп, каждая из которых состоит из одного мальчика и одной девочки. Известно, что некоторые люди знакомы, причём выполнены следующие условия:

- мальчики не знакомы с другими мальчиками, а девочки не знакомы с другими девочками;
- в каждой группе мальчик и девочка знакомы;
- для любых двух групп среди входящих в них четырёх людей есть хотя бы 3 знакомства.

Докажите, что можно выбрать 4038 детей и посадить их за круглый стол так, чтобы любые два соседа были знакомы.

8. В графе все вершины имеют степень 3. Известно, что количество раскрасок рёбер данного графа в три цвета таких, что в каждой вершине сходится три разноцветных ребра, не делится на 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

1. а) Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует гамильтонов путь.

б) Докажите, что в любом сильносвязном полном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.

2. **Признак Дирака.** а) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

б) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

3. **Признак Оре.** а) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем n . Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

б) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем $n - 1$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

4. Какое максимальное число рёбер может быть в графе на n вершинах, в котором нет гамильтонова пути?

5. В танцевальном кружке занимаются 27 мальчиков и 27 девочек. Известно, что каждый мальчик знает по крайней мере 14 девочек, а каждая девочка знает хотя бы 14 мальчиков (знакомства взаимны). Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли две его знакомые девочки.

6. а) Какое наименьшее число рёбер может быть в графе на n вершинах, в котором при удалении любого ребра существует гамильтонов цикл?

б) Какое наименьшее число рёбер может быть в графе на n вершинах, если для любых вершин A и B существует гамильтонов путь с началом в A и концом в B ?

7. Есть 2020 непересекающихся групп, каждая из которых состоит из одного мальчика и одной девочки. Известно, что некоторые люди знакомы, причём выполнены следующие условия:

- мальчики не знакомы с другими мальчиками, а девочки не знакомы с другими девочками;
- в каждой группе мальчик и девочка знакомы;
- для любых двух групп среди входящих в них четырёх людей есть хотя бы 3 знакомства.

Докажите, что можно выбрать 4038 детей и посадить их за круглый стол так, чтобы любые два соседа были знакомы.

8. В графе все вершины имеют степень 3. Известно, что количество раскрасок рёбер данного графа в три цвета таких, что в каждой вершине сходится три разноцветных ребра, не делится на 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.