10-1 Производная многочлена 22 февраля 2021

Упражнение. Докажите, что любой непостоянный многочлен с действительными коэффициентами монотонно возрастает или убывает, начиная с некоторого момента.

1. а) Докажите, что непостоянный многочлен $P(x)$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень.

б) Докажите, что многочлен $P(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

2. У многочлена степени n есть n различных действительных корней. Докажите, что их среднее арифметическое равно среднему арифметическому действительных корней производной этого многочлена.

3. Докажите, что у многочлена $P(x) = a_0 + a_1 x^{k_1} + a_2 x^{k_2} + \ldots + a_n x^{k_n}$ не более n положительных корней.

4. Даны многочлены f и g степени n. Докажите, что функция
$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n f^{(n)} g$ — константа.

5. Докажите, что при умножении многочлена $(x+1)^k$ на любой многочлен, отличный от нуля, получается многочлен, имеющий хотя бы $k+1$ ненулевых коэффициентов.

6. У многочлена степени n есть n различных корней. Какое наибольшее количество нулевых коэффициентов у него может быть?

7. Теорема Гаусса-Люка. Докажите, что для непостоянного многочлена $P(z)$ с комплексными коэффициентами корни его производной $P'(z)$ принадлежат выпуклой оболочке корней $P(z)$.

8. Существуют ли многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами, отличные от константы, для которых

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}?$$