

1. а) Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $X$ , точка  $A'$  — середина этой стороны. Докажите, что прямая  $A'I$  (где  $I$  — центр вписанной окружности) делит пополам отрезок  $AX$ .

б) В треугольнике  $ABC$  через середину  $M$  стороны  $BC$  и центр  $I$  вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая  $MI$ , пересекающая высоту  $AH$  в точке  $E$ . Докажите, что отрезок  $AE$  равен радиусу вписанной окружности.

2. В треугольнике  $ABC$   $M$  — точка пересечения медиан,  $I$  — центр вписанной окружности,  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — ортоцентр,  $N$  — точка Нагеля.

а) Докажите, что  $I$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

б) Докажите, что  $\vec{NH} = 2\vec{OI}$ .

3. Постройте треугольник, если даны одна из вершин, центр вписанной окружности и точка пересечения медиан.

4. а) Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $A_0$ .  $I_a$  — центр соответствующей внеписанной окружности,  $M$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AA_0 \parallel MI_a$ .

б) Пусть  $I_a, I_b, I_c$  — центры внеписанных окружностей;  $A_0, B_0, C_0$  — середины сторон треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые  $I_aA_0, I_bB_0, I_cC_0$  пересекаются в одной точке.

5. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания внеписанных окружностей со сторонами  $BC, AC, AB$  соответственно,  $N$  — точка Нагеля,  $L$  и  $K$  — соответственно ближайшая и дальняя к  $B$  точки пересечения вписанной окружности и  $BB_1$ ,  $M$  — середина стороны  $AC$ .

а) Докажите, что прямая  $MK$  касается вписанной окружности.

б) Докажите, что  $BL = NB_1$ .

6. а) В треугольнике  $ABC$ , в котором  $AB + BC = 3AC$ , вписанная окружность с центром  $I$  касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Точки  $K$  и  $L$  симметричны соответственно точкам  $D$  и  $E$  относительно  $I$ . Докажите, что  $ACKL$  — вписанный четырёхугольник.

б) Докажите, что для такого треугольника точка Нагеля лежит на его вписанной окружности.

в) Докажите, что точки пересечения прямых  $AL$  и  $CK$  с прямой  $DE$  равноудалены от середины отрезка  $AC$ .

7. На высоте, опущенной из вершины  $A$  остроугольного треугольника  $ABC$ , выбрана точка  $K$  так, что  $AK = r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Обозначим через  $A_1$  точку касания вписанной окружности со стороной  $BC$ , а через  $F$  — точку Фейербаха. Докажите, что  $\angle KFA_1 = 90^\circ$ .