10-1 Индукция и спуск в ТЧ 15 февраля 2021

1. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных делителей числа $n!$.

2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ число $2^{2^{2^{\cdots^{2}}}} - 2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$ (в первом числе n двоек, а во втором $n-1$) делится на n.

3. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на n.

4. Докажите, что для любого натурального N существует тройка различных натуральных чисел x, y, z, больших N, для которых выполняется равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

5. Натуральные числа a, b, c, m таковы, что $1 + a^2 + b^2 + c^2 = abcm$. Докажите, что $m = 4$.

6. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существует n различных натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n таких, что для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ число $a_j + a_i$ делится на $|a_j - a_i|$.

7. В разложении натурального числа n на простые множители каждый множитель присутствует не более, чем в первой степени. Докажите, что для любого натурального m, взаимно простого с n, существует натуральное a такое, что $a^a \equiv m \pmod{n}$.