Таблички

25 января 2021

1. Оля придумала новую шахматную фигуру *супер-слон.* Один супер-слон (обозначим его A) бьёт другого (обозначим его B), если они стоят на одной диагонали, между ними нет фигур, и следующая по диагонали клетка за супер-слоном B свободна. Какое наибольшее количество супер-слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы каждый из них бился хотя бы одним другим?

2. Петя раскрасил клетки доски 10×10 в несколько цветов так, что в любой строке, как и в любом столбце, использовано не более трёх цветов. Какое наибольшее количество цветов мог использовать Петя?

3. Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

4. Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

5. Клетки квадрата $n \times n$ раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход можно в любом квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него 4 клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

6. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

7. Есть клетчатая доска 2015×2015. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

8. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2. Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел.