10-1	Теорема Хелли	21 января 2021

1. Теорема Хелли для прямой. На прямой отмечено несколько отрезков, интервалов и лучей так, что любые два отмеченных множества имеют общую точку. Докажите, что все отмеченные множества имеют общую точку.

Определение. Подмножество M в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек A и B, лежащих в M, отрезок AB полностью лежит в M.

Упражнение. Докажите, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым.

2. Теорема Хелли для плоскости. На плоскости отмечено несколько выпуклых множеств. Известно, что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что

а) любые четыре множества имеют общую точку;

б) все множества имеют общую точку.

в) Докажите, что теорема Хелли не верна для бесконечного числа множеств.

3. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

4. На плоскости отмечено несколько точек. Оказалось, что любые три точки можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно покрыть кругом радиуса 1.

5. Теорема Юнга. Докажите, что любой многоугольник, расстояние между вершинами которого не превосходит 1, можно покрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Докажите, что если несколько полуплоскостей покрывают плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покрывают всю плоскость.

7. На плоскости дано конечное число вертикальных отрезков. Любые три из них можно пересечь одной прямой. Докажите, что все их можно пересечь одной прямой.

8. Теорема Бляшке. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник, который нельзя покрыть полосой ширины меньше 1, можно вписать окружность радиуса $\frac{1}{3}$.

9. На плоскости отмечены n точек общего положения. Докажите, что на этой плоскости существует точка O такая, что по любую сторону относительно любой прямой, проходящей через O, лежит не менее $\frac{n}{3}$ отмеченных точек (точка, лежащая на прямой, считается лежащей по обе стороны от этой прямой).