10-1 Готовимся к хард-регионалке 18 января 2021

1. Докажите, что существует натуральное $n > 10^{2021}$ такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

2. В клетках таблицы 100×100 «змейкой» записаны числа от 1 до 10000 (1 ставится в произвольную клетку; каждое следующее число записано в клетку, соседнюю по стороне с предыдущей). Обозначим через a_k расстояние между центрами клеток, в которых стоят числа k и $k+5000$ ($1 \leqslant k \leqslant 5000$). Пусть $A = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant 5000} a_k$. Какое наибольшее значение может принимать A в зависимости от расстановки чисел?

3. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.

4. Для натурального s и простого p будем обозначать через $\nu_p(s)$ степень вхождения p в разложение s на простые множители.

Для каких простых p последовательность $x_k = \nu_p(a^k + b^k + c^k)$ ограничена для любых натуральных чисел a, b, c, взаимно простых в совокупности?

5. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что задумал многочлен степени 2021 с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит им значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно бы совпал с задуманным?

6. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

7. На доске написано уравнение

$$(x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \ldots \cdot (x^2 + *x + *) =$$

$$= (x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \ldots \cdot (x^2 + *x + *),$$

в обеих частях перемножаются по 10 квадратных трёхчленов. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) меняют коэффициенты $*$ на действительные числа, отличные от 0. Петя хочет, чтобы после последнего хода Васи получившееся уравнение имело действительный корень. Может ли Вася ему помешать?