10-1 **Разностный многочлен** 14 января 2021

Определение. Для функции f обозначим $\triangle f(x) = f(x+1) - f(x)$ (иногда это называют *разностной функцией* или даже *дискретной производной*). Также индуктивно определим и $\triangle^{k+1} f(x) = (\triangle^k f)(x+1) - (\triangle^k f)(x)$.

Упражнение. Найдите явную формулу для $\triangle^k f(x)$.

Вопрос. Если $f(x)$ — многочлен степени n, то какова степень $\triangle f(x)$?

Воспоминание. Если многочлен степени n принимает целые значения в $n+1$ последовательной целой точке, то он принимает целые значения во всех целых точках.

1. Дано натуральное n. Найдите явно многочлен $P(x)$ степени n такой, что $n \cdot P(x) = x \cdot \triangle P(x)$.

2. Докажите, что для любого многочлена $Q(x)$ существует единственный с точностью до прибавления константы многочлен $P(x)$ такой, что $Q = \triangle P$.

3. Докажите, что функция $f(x)$ от целого аргумента является многочленом тогда и только тогда, когда существует число k такое, что $\triangle^k f(x) = 0$.

4. Для каких k верен следующий факт: для любого натурального n число $k \cdot \dfrac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}$ является целым?

5. а) Докажите, что функция $f(n) = 1^{20} + 2^{20} + \ldots + n^{20}$ является многочленом от n с рациональными коэффициентами. Какие у него степень и старший коэффициент? **б)** Найдите $f(-\frac{1}{2})$.

6. Докажите, что любое рациональное число является суммой кубов четырёх рациональных чисел.

7. Докажите, что многочлен степени n не является суммой n периодических функций.

8. Дано натуральное k. Для каждого натурального n обозначим через $f(n)$ наименьшее значение выражения $|\pm 1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm n^k|$ по всем возможным расстановкам знаков. Докажите, что функция $f(n)$ периодична, начиная с некоторого момента.

9. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами степени n таков, что для любых целых $0 \leqslant a < b \leqslant n$ число $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ — целое. Докажите, что это выражение целое для всех различных целых a и b.