

1. В треугольнике ABC с прямым углом C биссектриса AL (где L лежит на отрезке BC) и высота CH пересекаются в точке K . Биссектриса угла BCH пересекает отрезок AB в точке M . Докажите, что $CK = ML$.

2. Положительные числа a , b и c таковы, что $a^2 = b^2 + bc$ и $b^2 = c^2 + ac$. Докажите, что $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

3. Деду Морозу нравятся только те натуральные числа, все цифры которых больше 5, а Снегурочке — только те, все цифры которых меньше 5. Существует ли число, которое нравится Деду Морозу, квадрат которого нравится Снегурочке?

4. В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Дед Мороз и Снегурочка по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Дед Мороз ходит первым. Каждым ходом Дед Мороз выбирает пустую клетку и ставит в неё крестик, а Снегурочка каждым ходом выбирает пустую клетку и ставит нолик. После того, как в первой строке не остаётся пустых клеток, игроки переходят ко второй строке, и так далее (в каждой новой строке Дед Мороз ходит первым).

Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Дед Мороз хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Снегурочка — как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если оба игрока будут действовать наилучшим для себя образом?

5. Дано натуральное $n > 1$. Дед Мороз к Новому Году собирается выпускать n типов новогодних подарков, в которых лежат по $a_1 < \dots < a_n$ конфет (все числа a_i — натуральные; подарки одного типа одинаковы). Снегурочка хочет, чтобы $S = a_1 + \dots + a_n$ конфет можно было набрать этими подарками единственным способом (взяв по одному подарку каждого типа).

а) Докажите, что Дед Мороз может выполнить желание Снегурочки при некотором $S < n2^n$.

б) Докажите, что Дед Мороз не может выполнить желание Снегурочки при любом $S \leq n2^{n-1}$.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — точки пересечения пар диагоналей BD и CE , CE и DA , DA и EB , EB и AC , AC и BD соответственно. Докажите, что если четыре из пяти четырёхугольников AB_1A_1B , BC_1B_1C , CD_1C_1D , DE_1D_1E , EA_1E_1A вписанные, то и пятый тоже вписанный.