10-1 **Инверсия + симметрия** 14 декабря 2020

1. Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P, а также дуги BC окружности ω, не содержащей точки A, в точке Q. Докажите, что если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle PAO = \angle QAO$.

2. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

3. Окружность γ вписана в угол B треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке P. Пусть X и Y — её точки касания со сторонами AB и BC соответственно. Пусть также вневписанная в угол B окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой XY.

4. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD ($BC < AD$). Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD, а P — точка пересечения боковых сторон. Докажите, что $\angle APO_1 = \angle DPO_2$.

5. Обозначим середины стороны AB, BC и AC треугольника ABC через C_0, A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников AOC и $A_0B_0C_0$, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

6. В окружность ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности ω соответственно. Пусть M — проекция точки Q на отрезок AB. Докажите, что описанная окружность треугольника BMC делит пополам отрезок BP.

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются хордами касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны соответственно α и β. Пусть ω_3 и ω_4 — также окружности с хордами AB и CD соответственно, но градусные меры аналогичных дуг AB и CD равны соответственно β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

8. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω и γ с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся γ и ω внешним образом и проходящая через A, касается описанной окружности треугольника ABC.