

1. В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Всегда ли по этой информации можно узнать пару крайних карт колоды?

2. а) Есть призма с 20 вершинами, в каждой вершине которой записали действительное число, после чего на каждом ребре записали сумму чисел в концах этого ребра, а числа в вершинах стёрли. Можно ли восстановить исходные числа?

б) То же, но известно, что изначально записали все числа от 1 до 20 по одному разу.

3. Есть а) 4 яблока; б) 5 яблок разных весов и чашечные весы без гирь. Всегда ли можно найти яблоко, чей вес ближе всего к среднему весу всех яблок?

4. В звездном атласе все известные галактики были занумерованы подряд натуральными числами, начиная от 1000. Номера шли подряд и без повторений. Для контроля отдельно хранились НОД номеров каждой пары галактик. Когда число галактик перевалило за 100 миллиардов, случился сбой и все номера были потеряны. Можно ли их все восстановить по контрольной информации?

5. Дано 100 гирек попарно различных весов. За одно взвешивание разрешается узнать суммарный вес любых двух. За какое наименьшее количество взвешиваний удастся определить, какая из гирек самая лёгкая?

6. Среди $2n + 1$ человека есть $n + 1$ рыцарь и n лжецов. За одно действие мы можем выбрать двух различных людей X и Y , и спросить у X , верно ли, что Y — рыцарь. За какое наименьшее количество действий можно гарантированно определить «роль» хотя бы одного человека?

7. В игре «Кольцевая мафия» изначально 2019 фишек стоят по кругу. Среди них 673 фишки — мафия, а остальные — мирные жители. Ваня и Игорь ходят по очереди, Ваня ходит первым. При этом Ваня не знает, какие фишки относятся к мафии, а Игорь знает. Ваня в свой ход убирает любое подмножество фишек (возможно, пустое). Игорь в свой ход выбирает одну мирную фишку, соседнюю с фишкой мафии, и убирает её. Когда убирается какая-то фишка, её соседи становятся соседями друг друга. Ваня стремится к тому, чтобы в какой-то момент остались только мирные фишки. Может ли Ваня гарантированно этого добиться?

8. В каждый узел целочисленной решётки поставили действительное положительное число. Известно, что сумма чисел на любой прямой конечна (т.е. существует конечный предел сумм). Разрешается узнавать сумму чисел на каждой прямой, проходящей хотя бы через два узла.

а) Пусть известно также, что сумма чисел на всей плоскости конечна. Можно ли однозначно восстановить все числа?

б) Пусть сумма чисел на всей плоскости может быть бесконечной. Можно ли теперь однозначно восстановить все числа?