10-1	Алгебра?	7 декабря 2020

1. Положительные a, b, c, A, B, C таковы, что $a + A = b + B = c + C = S$. Докажите, что $aB + bC + cA < S^2$.

2. На доске написаны три натуральных числа a, b, c. Петя записывает на бумажке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулём. Найдите сумму чисел на Петиной бумажке в этот момент.

3. Положительные числа x, y, z, t дают в сумме 10. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+2} + \sqrt{z^2+3} + \sqrt{t^2+4}$.

4. Для положительных чисел x, y, z докажите, что

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geqslant 3\sqrt{xy+yz+zx}.$$

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = 2x^2 - 1, \\ z = 2y^2 - 1, \\ x = 2z^2 - 1. \end{cases}$

6. Пусть $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$ для всех натуральных n. Докажите, что сумма первых 2020 членов этой последовательности меньше 1,03.

7. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена $x^3 - 3x - 1$. Докажите, что

$$x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1.$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 1, \\ 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}). \end{cases}$$

9. а) Докажите, что среди любых шести чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Докажите, что среди любых трёх чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+x+y+2xy} \leqslant \sqrt{3}$.

10. Дана функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Положительные числа a, b, c, x_1, x_2, …, x_7 удовлетворяют соотношениям $f(x_1, x_2, a) = f(x_2, x_3, b) = f(x_3, x_4, c) = f(x_4, x_5, a) = f(x_5, x_6, b) = f(x_6, x_7, c) = 1$. Докажите, что $x_7 = x_1$.