10-1 Геометрический разнобой 30 ноября 2020

1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из вершины A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность S, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC — в точке F. M — произвольная точка внутри четырёхугольника. Пусть S — точка пересечения прямых AD и EM, а P — точка пересечения прямых AB и FM. Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке.

3. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D, а продолжений сторон AB и AC — в точках E и F. Пусть T — точка пересечения прямых BF и CE. Докажите, что A, D и T лежат на одной прямой.

4. Окружность пересекает стороны AC, BC и AB треугольника в точках B_1 и B_2, A_1 и A_2, C_1 и C_2 соответственно. Оказалось, что перпендикуляры к сторонам BC, AC и AB, восстановленные в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к тем же сторонам, восстановленные в точках A_2, B_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись точки M и N соответственно такие, что $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD}$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

6. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

7. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 BB_1 и CC_1. Пусть A_2A_1 B_2B_1 и C_2C_1 — диаметры окружности девяти точек треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке или параллельны.