10-1 **Разнобой** 26 ноября 2020

1. Найдите наименьший простой делитель числа $12^{2^{15}}+1$.

2. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m<n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, причём в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна звёздочка такая, что в одной строке с ней находится больше звёздочек, чем в одном столбце с ней.

3. Положительные a,b,c таковы, что $ab+bc+ca=1$. Докажите, что

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2}\geqslant 3.$$

4. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается его сторон AB, BC, AC в точках C', A', B' соответственно. Точки K_a, K_b, K_c — середины отрезков IA', IB', IC' соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $K_aK_bK_c$ перспективны.

5. Лемма Минковского. На плоскости дана выпуклая фигура площади больше 4 с центром симметрии в целой точке. Докажите, что внутри неё есть ещё хотя бы одна целая точка.

6. Андрей Борисович составляет олимпиаду для параллелей 5–11 классов. В каждой параллели должно быть по 15 задач, причём у любых двух параллелей должно быть не более пяти общих задач. Какое наименьшее количество задач нужно Андрею Борисовичу?

7. Вписанный многоугольник разбили на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей всех этих треугольников не зависит от разбиения.

8. Пусть $Q(t)$ — квадратный трёхчлен с двумя действительными корнями. Докажите, что существует приведённый многочлен $P(x)$, не являющийся константой, такой, что модули всех коэффициентов многочлена $Q(P(x))$, быть может кроме старшего, меньше $\frac{1}{1000}$.