10-1 **Теория вероятностей — 2** 29 октября 2020

Определение. *Условной вероятностью* события A при наступлении события B (обозначается как $P(A|B)$) называется отношение вероятности одновременного наступления событий A и B к вероятности события B, т.е. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

1. Доля больных одним редким заболеванием равна $0,01\%$. Лаборатория особо важных исследований разработала анализ, проверяющий на наличие этого заболевания. При этом вероятность ложно-отрицательного результата (т.е. когда анализ показывает, что человек здоров, хотя он на самом деле болен) равна $0,01$, а вероятность ложно-положительного результата (т.е. когда анализ показывает, что человек болен, хотя он на самом деле здоров) равна $0,001$. Анализ показал, что человек болен. Какова вероятность того, что у него на самом деле это редкое заболевание?

2. Из контейнера A, в котором было 1000 зеленых и 3000 красных яблок, случайным образом взяли половину яблок и перенесли в контейнер B, в котором к тому времени уже лежало 3000 зеленых и 1000 красных яблок. Затем из контейнера B достали одно яблоко. С какой вероятностью оно окажется зеленым?

3. Дима собирается сделать 100 бросков в кольцо. Первый раз он попал, а второй промазал. Вероятность очередной раз попасть в кольцо равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках. С какой вероятностью он попадёт ровно 50 раз?

4. Дальноземье постоянно страдает от стихийных бедствий. Частенько бывают наводнения, засухи, извержения вулкана и ураганы. Для каждого из этих четырёх стихийных бедствий вероятность того, что оно произойдёт за год, равна $\frac{1}{2}$. За год не происходит больше одного стихийного бедствия каждого из типов.
а) Докажите, что обязательно найдётся пара стихийных бедствий таких, что вероятность того, что в году произойдут эти два стихийных бедствия, не меньше $\frac{1}{6}$.
б) Докажите, что оценку из пункта а) улучшить нельзя.

5. В очереди затылок друг к другу выстроились n человек разного роста. Настя стоит перед ними и смотрит на очередь. Более высокие загораживают более низких, и тех не видно. Чему равно среднее значение числа людей, которых видно Насте?

6. 100 пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. Каждому пассажиру было выделено своё место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом (все 100! вариантов рассадки равновероятны). Однако 100-й пассажир решил занять именно своё место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято) и так далее. Найдите математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в это число).

7. 100 мудрецов с разными именами взяли в плен. Их имена напишут на бумажках и случайно разложат по 100 сундукам (любая перестановка равновероятна). Далее их будут запускать по одному в комнату с сундуками, где каждый из них сможет последовательно открыть не более 50 сундуков. Если каждый из них найдёт своё имя, то их всех отпустят, иначе всех казнят. Докажите, что у мудрецов существует стратегия, по которой они окажутся на свободе с вероятностью не менее $\frac{1}{4}$.

10-1 Теория вероятностей — 2 29 октября 2020

Определение. Условной вероятностью события A при наступлении события B (обозначается как $P(A|B)$) называется отношение вероятности одновременного наступления событий A и B к вероятности события B, т.е. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

1. Доля больных одним редким заболеванием равна $0,01\%$. Лаборатория особо важных исследований разработала анализ, проверяющий на наличие этого заболевания. При этом вероятность ложно-отрицательного результата (т.е. когда анализ показывает, что человек здоров, хотя он на самом деле болен) равна $0,01$, а вероятность ложно-положительного результата (т.е. когда анализ показывает, что человек болен, хотя он на самом деле здоров) равна $0,001$. Анализ показал, что человек болен. Какова вероятность того, что у него на самом деле это редкое заболевание?

2. Из контейнера A, в котором было 1000 зеленых и 3000 красных яблок, случайным образом взяли половину яблок и перенесли в контейнер B, в котором к тому времени уже лежало 3000 зеленых и 1000 красных яблок. Затем из контейнера B достали одно яблоко. С какой вероятностью оно окажется зеленым?

3. Дима собирается сделать 100 бросков в кольцо. Первый раз он попал, а второй промазал. Вероятность очередной раз попасть в кольцо равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках. С какой вероятностью он попадёт ровно 50 раз?

4. Дальноземье постоянно страдает от стихийных бедствий. Частенько бывают наводнения, засухи, извержения вулкана и ураганы. Для каждого из этих четырёх стихийных бедствий вероятность того, что оно произойдёт за год, равна $\frac{1}{2}$. За год не происходит больше одного стихийного бедствия каждого из типов.
а) Докажите, что обязательно найдётся пара стихийных бедствий таких, что вероятность того, что в году произойдут эти два стихийных бедствия, не меньше $\frac{1}{6}$.
б) Докажите, что оценку из пункта а) улучшить нельзя.

5. В очереди затылок друг к другу выстроились n человек разного роста. Настя стоит перед ними и смотрит на очередь. Более высокие загораживают более низких, и тех не видно. Чему равно среднее значение числа людей, которых видно Насте?

6. 100 пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. Каждому пассажиру было выделено своё место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом (все 100! вариантов рассадки равновероятны). Однако 100-й пассажир решил занять именно своё место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято) и так далее. Найдите математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в это число).

7. 100 мудрецов с разными именами взяли в плен. Их имена напишут на бумажках и случайно разложат по 100 сундукам (любая перестановка равновероятна). Далее их будут запускать по одному в комнату с сундуками, где каждый из них сможет последовательно открыть не более 50 сундуков. Если каждый из них найдёт своё имя, то их всех отпустят, иначе всех казнят. Докажите, что у мудрецов существует стратегия, по которой они окажутся на свободе с вероятностью не менее $\frac{1}{4}$.