

Определение. Аффинным преобразованием плоскости называется биекция плоскости, переводящая прямые в прямые.

0. Докажите, что аффинное преобразование плоскости а) переводит параллельные прямые в параллельные; б) сохраняет отношение отрезков на прямой; в) сохраняет отношение отрезков на параллельных прямых.

1. а) Даны точки O, O' и две пары неколлинеарных векторов e_1, e_2 и e'_1, e'_2 . Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее O в O' , e_1 в e'_1 и e_2 в e'_2 . Опишите его действие на всех точках плоскости.

б) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в A_1 , B в B_1 , C в C_1 .

2. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного в пересечении шести проведённых прямых, пересекаются в одной точке.

3. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, параллельные CD и AB соответственно. Докажите, что

а) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований;

б) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

4. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что отношение площадей многоугольников сохраняется при аффинном преобразовании.

6. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Пусть M — середина AD , P — точка пересечения BM и AC , Q — точка пересечения прямой BD с прямой, параллельной AD и проходящей через точку P . Докажите, что точки P и Q делят отрезок прямой PQ , высекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.

7. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

8. **Прямая Гаусса.** Докажите, что если никакие стороны четырёхугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

9. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Пусть S_1, S_2, S_3 — упорядоченные по возрастанию площади треугольников $A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1$, а S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\sqrt{S_1 S_2} \leq S \leq \sqrt{S_2 S_3}$.

Определение. Аффинным преобразованием плоскости называется биекция плоскости, переводящая прямые в прямые.

0. Докажите, что аффинное преобразование плоскости а) переводит параллельные прямые в параллельные; б) сохраняет отношение отрезков на прямой; в) сохраняет отношение отрезков на параллельных прямых.

1. а) Даны точки O, O' и две пары неколлинеарных векторов e_1, e_2 и e'_1, e'_2 . Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее O в O' , e_1 в e'_1 и e_2 в e'_2 . Опишите его действие на всех точках плоскости.

б) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в A_1 , B в B_1 , C в C_1 .

2. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного в пересечении шести проведённых прямых, пересекаются в одной точке.

3. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, параллельные CD и AB соответственно. Докажите, что

а) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований;

б) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

4. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что отношение площадей многоугольников сохраняется при аффинном преобразовании.

6. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Пусть M — середина AD , P — точка пересечения BM и AC , Q — точка пересечения прямой BD с прямой, параллельной AD и проходящей через точку P . Докажите, что точки P и Q делят отрезок прямой PQ , высекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.

7. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

8. **Прямая Гаусса.** Докажите, что если никакие стороны четырёхугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

9. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Пусть S_1, S_2, S_3 — упорядоченные по возрастанию площади треугольников $A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1$, а S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\sqrt{S_1 S_2} \leq S \leq \sqrt{S_2 S_3}$.