10-1 Теория вероятностей 19 октября 2020

Определение. *Дискретным вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлено число p_i, удовлетворяющее условиям $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются событиями, элементы ω_i — *элементарными исходами.* Для каждого события $A \in \Omega$ определена его *вероятность* $P(A)$ посредством формулы $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.
Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной.* Для каждой случайной величины ξ определено её *математическое ожидание*: $E\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i \xi(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и ν и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $E(\xi + \nu) = E\xi + E\nu$, $E(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot E(\xi)$.
Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $I_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 при $\omega \in \Omega \backslash A$. Верно равенство $P(A) = EI_A$.

1. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0 < p < 1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите
а) вероятность того, что упадёт ровно k гномиков;
б) математическое ожидание числа упавших гномиков.

2. Докажите, что существует полный ориентированный граф с n вершинами, в котором не менее $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна $\frac{1}{6}$. Докажите, что кубик правильный (т.е. все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

4. Пусть за столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек в случайном порядке. Сколько в среднем блоков из подряд идущих людей одного пола?

5. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$.

6. За бесконечным в обе стороны столом сидит счётное число школьников, решающих задачу. Для каждого школьника вероятность решить ее самостоятельно равна 1/2. Также с вероятностью 1/4 ему удастся подсмотреть в тетрадь соседа слева, и с вероятностью 1/4 — в тетрадь соседа справа. Все эти события (для всех школьников) независимы между собой. Если кто-то из школьников получил решение задачи, то каждый подсмотревший к нему в тетрадь также его получает. Найдите вероятность, что сидящий в ряду школьник Кузя получит решение задачи.

7. В классе учатся несколько мальчиков и девочек, причём каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. Докажите, что можно выбрать не менее половины школьников так, чтобы каждый выбранный мальчик дружил с нечётным количеством выбранных девочек.

8. Докажите, что в любом конечном множестве A, состоящем из натуральных чисел, можно выделить подмножество S, размер которого больше трети от размера множества A, чтобы в множестве S не нашлось различных a, b, c таких, что $a+b = c$.

10-1 Теория вероятностей 19 октября 2020

Определение. *Дискретным вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлено число p_i, удовлетворяющее условиям $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются событиями, элементы ω_i — *элементарными исходами.* Для каждого события $A \in \Omega$ определена его *вероятность* $P(A)$ посредством формулы $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.
Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной.* Для каждой случайной величины ξ определено её *математическое ожидание*: $E\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i \xi(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и ν и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $E(\xi + \nu) = E\xi + E\nu$, $E(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot E(\xi)$.
Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $I_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 при $\omega \in \Omega \backslash A$. Верно равенство $P(A) = EI_A$.

1. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0 < p < 1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите
а) вероятность того, что упадёт ровно k гномиков;
б) математическое ожидание числа упавших гномиков.

2. Докажите, что существует полный ориентированный граф с n вершинами, в котором не менее $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна $\frac{1}{6}$. Докажите, что кубик правильный (т.е. все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

4. Пусть за столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек в случайном порядке. Сколько в среднем блоков из подряд идущих людей одного пола?

5. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$.

6. За бесконечным в обе стороны столом сидит счётное число школьников, решающих задачу. Для каждого школьника вероятность решить ее самостоятельно равна 1/2. Также с вероятностью 1/4 ему удастся подсмотреть в тетрадь соседа слева, и с вероятностью 1/4 — в тетрадь соседа справа. Все эти события (для всех школьников) независимы между собой. Если кто-то из школьников получил решение задачи, то каждый подсмотревший к нему в тетрадь также его получает. Найдите вероятность, что сидящий в ряду школьник Кузя получит решение задачи.

7. В классе учатся несколько мальчиков и девочек, причём каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. Докажите, что можно выбрать не менее половины школьников так, чтобы каждый выбранный мальчик дружил с нечётным количеством выбранных девочек.

8. Докажите, что в любом конечном множестве A, состоящем из натуральных чисел, можно выделить подмножество S, размер которого больше трети от размера множества A, чтобы в множестве S не нашлось различных a, b, c таких, что $a+b = c$.