10-1 Числовой разнобой 15 октября 2020

1. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2020 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

2. Сумма двух кубов натуральных чисел оказалась точной степенью некоторого простого числа. Что это может быть за простое число?

3. Решите уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ в целых числах.

4. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ не делится на $n^b + 1$.

5. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ делилась на $m + n$?

6. Найдите все пары натуральных чисел a и k таких, что для любого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.

7. Дано натуральное $n > 1$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел $a+1$, $a+2$, …, $a+n$ есть кратные каждого из чисел $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+n$. Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

8. На доске записано натуральное число. Каждую секунду к числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что существует натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

9. В бесконечной последовательности $\{x_n\}$ первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

10-1 Числовой разнобой 15 октября 2020

1. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2020 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

2. Сумма двух кубов натуральных чисел оказалась точной степенью некоторого простого числа. Что это может быть за простое число?

3. Решите уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ в целых числах.

4. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ не делится на $n^b + 1$.

5. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ делилась на $m + n$?

6. Найдите все пары натуральных чисел a и k таких, что для любого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.

7. Дано натуральное $n > 1$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел $a+1$, $a+2$, …, $a+n$ есть кратные каждого из чисел $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+n$. Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

8. На доске записано натуральное число. Каждую секунду к числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что существует натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

9. В бесконечной последовательности $\{x_n\}$ первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.