10-1 Веса и их перераспределение 8 октября 2020

1. На бесконечной в обе стороны полосе клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по несколько в одной клетке). За одну операцию можно снять по фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все состояния, в которых невозможно выполнить операцию, а на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. У каждого из школьников, ходящих на кружок в 10 класс, не больше 20 друзей. Докажите, что их можно разделить на группы 10-1 и 10-2 так, чтобы у каждого человека в группе 10-1 было не больше 15 друзей внутри группы 10-1, а у каждого человека в группе 10-2 было не больше 5 друзей внутри группы 10-2.

3. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух или более фишек в один узел. Докажите, что если изначально

а) в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми;

б) в узле $(0,\ 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

4. В некоторых клетках клетчатой полосы $1 \times n$ стоят фишки. В первой клетке (самой левой) x_1 штук, во второй — x_2, …, в n-й клетке — x_n. Двое игроков играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок выбирает некоторое подмножество фишек, а второй либо передвигает все фишки этого подмножества на 1 клетку влево, а остальные убирает с доски, либо делает то же самое с дополнением выбранного подмножества. При каких x_1, x_2, …, x_n первый игрок может гарантированно добиться того, чтобы какая-то фишка оказалась в самой первой клетке?

5. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

6. В классе учатся несколько m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d \geqslant 2m$.

7. На плоскости дано $n > 1$ окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что существует хотя бы n различных точек пересечения окружностей.

8. На банкете магической олимпиады Хогвартса присутствовало 14 членов жюри. Выпив 35 бутылок зелья, они решили расставить их на круглом столе так, чтобы на отрезке между любыми двумя людьми стояла как минимум одна бутылка. Докажите, что у них это не получится.

9. В ряд стоят $n > 1$ стаканов дном вверх. За одну операцию разрешается выкинуть любой стакан, стоящий дном вверх, перевернуть двух его соседей и сдвинуть ряд (крайние стаканы выкидывать нельзя). Докажите, что такими операциями можно оставить на столе два стакана тогда и только тогда, когда $n-1$ не делится на 3.

10-1 Веса и их перераспределение 8 октября 2020

1. На бесконечной в обе стороны полосе клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по несколько в одной клетке). За одну операцию можно снять по фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все состояния, в которых невозможно выполнить операцию, а на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. У каждого из школьников, ходящих на кружок в 10 класс, не больше 20 друзей. Докажите, что их можно разделить на группы 10-1 и 10-2 так, чтобы у каждого человека в группе 10-1 было не больше 15 друзей внутри группы 10-1, а у каждого человека в группе 10-2 было не больше 5 друзей внутри группы 10-2.

3. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух или более фишек в один узел. Докажите, что если изначально

а) в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми;

б) в узле $(0,\ 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

4. В некоторых клетках клетчатой полосы $1 \times n$ стоят фишки. В первой клетке (самой левой) x_1 штук, во второй — x_2, …, в n-й клетке — x_n. Двое игроков играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок выбирает некоторое подмножество фишек, а второй либо передвигает все фишки этого подмножества на 1 клетку влево, а остальные убирает с доски, либо делает то же самое с дополнением выбранного подмножества. При каких x_1, x_2, …, x_n первый игрок может гарантированно добиться того, чтобы какая-то фишка оказалась в самой первой клетке?

5. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

6. В классе учатся несколько m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d \geqslant 2m$.

7. На плоскости дано $n > 1$ окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что существует хотя бы n различных точек пересечения окружностей.

8. На банкете магической олимпиады Хогвартса присутствовало 14 членов жюри. Выпив 35 бутылок зелья, они решили расставить их на круглом столе так, чтобы на отрезке между любыми двумя людьми стояла как минимум одна бутылка. Докажите, что у них это не получится.

9. В ряд стоят $n > 1$ стаканов дном вверх. За одну операцию разрешается выкинуть любой стакан, стоящий дном вверх, перевернуть двух его соседей и сдвинуть ряд (крайние стаканы выкидывать нельзя). Докажите, что такими операциями можно оставить на столе два стакана тогда и только тогда, когда $n-1$ не делится на 3.