10-1	Двойные отношения	5 октября 2020

Определение 1. *Двойным отношением* точек (A, B, C, D), лежащих на одной прямой, называют число $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Определение 2. *Двойным отношением* прямых (PA, PB, PC, PD), проходящих через одну точку, называют число $\frac{\sin(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC})}{\sin(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})} : \frac{\sin(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD})}{\sin(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PD})}$.

Определение 3. (Проверьте корректность такого определения!) *Двойным отношением* точек (A, B, C, D), лежащих на одной окружности, называют двойное отношение (PA, PB, PC, PD) для любой точки P на этой же окружности.

Упражнение 1. Для любых четырёх точек (A, B, C, D), лежащих на одной прямой, и точки P вне неё верно равенство $(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD)$.

Упражнение 2. Докажите, что

а) $(A, B, C, D) = (B, A, D, C)$;

б) $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$;

в) $(A, B, C, D) \cdot (B, A, C, D) = 1$.

г) Пусть $(A, B, C, D) = \alpha$. Чему может быть равно (A', B', C', D'), где A', B', C', D' — произвольная перестановка точек A, B, C, D?

Определение 4. Четвёрка точек, для которой $(A, B, C, D) = -1$, называется *гармонической*.

1. а) Чевианы AA_1, BB_1 и CR треугольника ABC пересекаются в точке P. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке T. Докажите, что $(A, B, R, T) = (A, B, T, R) = (B, A, T, R) = (B, A, R, T) = -1$.

б) Пусть M — середина AB, а R — бесконечно удалённая точка. Докажите, что $(A, B, M, R) = -1$. (Нужные определения дайте сами.)

в) P и Q — основания внешней и внутренней биссектрис угла C треугольника ABC. Докажите, что $(A, B, P, Q) = -1$.

г) Точки P и Q инверсны относительно окружности ω. Прямая PQ пересекает ω в точках A и B. Докажите, что $(A, B, P, Q) = -1$.

2. Пусть H_b — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_b — основание соответствующей биссектрисы; K_b — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_b — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_a, L_a, K_a, T_a определяются аналогично. Докажите, что

а) $(H_b, L_b, K_b, T_b) = -1$; **б)** $(C, H_b, T_b, K_b) = (C, H_a, T_a, K_a)$;

в) прямые H_aH_b, L_aL_b, K_aK_b, T_aT_b конкурентны.

3. Из точки A к окружности проведены касательные AP и AQ. Прямая, проведённая через A, пересекает окружность в точках B и C, а хорду PQ — в точке D. Докажите, что $(B, C, A, D) = -1$.

4. Обозначим через P основание внутренней биссектрисы угла C треугольника ABC, а через Q — внешней. Пусть M — середина BC, а прямые PM и AC пересекаются в точке R. Докажите, что $RQ = RC$.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями O — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

6. Построения линейкой. а) Постройте четвёртую гармоническую точку к трём данным, а также четвёртую гармоническую прямую к трём данным.

б) Даны две параллельные прямые. Поделите данный отрезок на одной из них пополам.

в) Даны две параллельные прямые. Удвойте отрезок на одной из них.

г) Даны параллелограмм, прямая и точка. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

7. Теорема о бабочке. Хорды AB и CD окружности ω проходят через середину M хорды XY той же окружности. Отрезки AC и BD пересекают XY в точках P и Q. Докажите, что $MP = MQ$.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Пусть I и J — центры вписанных окружностей треугольников ALC и ALB. Прямая IJ пересекает прямые AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что прямые AL, BB' и CC' пересекаются в одной точке.