10-1 Последовательности и оценки 1 октября 2020

1. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2020$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена $P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n$. Докажите, что с некоторого момента эта последовательность строго убывает.

2. Действительные числа d, a_1, a_2, $\ldots$, a_n таковы, что

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = \ldots = |a_{2020} - 2020| = d,$$

а $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2020}$ — эти же числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, но в порядке возрастания. Докажите, что $|b_k - a_k| \leqslant 2d$ для любого $1 \leqslant k \leqslant 2020$.

3. Бесконечная последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_0 = 100$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ для всех натуральных n. Найдите $[a_{400000}]$.

4. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ заданы условиями $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \dfrac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2020} < 5$.

5. Бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для любых натуральных чисел m и n выполнено неравенство $|a_m + a_n - a_{m+n}| \leqslant \frac{1}{m+n}$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

6. Бесконечная последовательность $\{a_i\}$ задана условиями $a_1 = 2020$, $a_{n+1} = n[\frac{a_n}{n}] + n$. Докажите, что в ней можно выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией.

7. Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_0 = 0, a_1 = 1$ и для $n \geqslant 2$ найдётся $1 \leqslant k \leqslant n$, для которого

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Найдите наибольшее возможное значение $a_{2020} - a_{2019}$.

8. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для всех натуральных k выполнено $a_{k+1} \geqslant \dfrac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$. Докажите, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$ для всех $n \geqslant 2$.

10-1 Последовательности и оценки 1 октября 2020

1. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2020$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена $P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n$. Докажите, что с некоторого момента эта последовательность строго убывает.

2. Действительные числа d, a_1, a_2, $\ldots$, a_n таковы, что

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = \ldots = |a_{2020} - 2020| = d,$$

а $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2020}$ — эти же числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, но в порядке возрастания. Докажите, что $|b_k - a_k| \leqslant 2d$ для любого $1 \leqslant k \leqslant 2020$.

3. Бесконечная последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_0 = 100$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ для всех натуральных n. Найдите $[a_{400000}]$.

4. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ заданы условиями $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \dfrac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2020} < 5$.

5. Бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для любых натуральных чисел m и n выполнено неравенство $|a_m + a_n - a_{m+n}| \leqslant \frac{1}{m+n}$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

6. Бесконечная последовательность $\{a_i\}$ задана условиями $a_1 = 2020$, $a_{n+1} = n[\frac{a_n}{n}] + n$. Докажите, что в ней можно выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией.

7. Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_0 = 0, a_1 = 1$ и для $n \geqslant 2$ найдётся $1 \leqslant k \leqslant n$, для которого

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Найдите наибольшее возможное значение $a_{2020} - a_{2019}$.

8. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для всех натуральных k выполнено $a_{k+1} \geqslant \dfrac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$. Докажите, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$ для всех $n \geqslant 2$.