10-1 **Усреднение** 28 сентября 2020

1. Есть два ожерелья, в каждом из которых по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Ксюша хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое наибольшее число совпадающих бусинок Ксюша может гарантированно получить?

2. В таблице 20×20 в каждой клетке лежит пончик или крендель, причём в каждом столбце лежит ровно 10 пончиков. Докажите, что найдутся две строки, у которых в пересечении с хотя бы 10 столбцами лежит одно и то же.

3. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперёд. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовём *временем перевода*. Требуется установить все часы так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

4. В городе N хотя бы 1000 жителей. У каждого из них знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно провести выборы мэра города из двух кандидатов так, что в них примет участие не менее половины жителей.

5. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его рёбер так, чтобы вершины оставшегося графа можно было покрасить правильным образом в n цветов.

6. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одинакового веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

7. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Два растения считаются *непохожими*, если они различаются хотя бы по 51 признаку. Докажите, что в справочнике не может находиться более 50 попарно непохожих растений.

8. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед обедом Белоснежка надевает случайным образом на каждого гнома красный или синий колпак. Гномы видят все колпаки, кроме своего, и пытаются угадать цвет своего колпака. Они пишут на бумажке предполагаемый цвет своего колпака или сдают пустую бумажку. Если все гномы, сдавшие непустые бумажки, угадали цвет своего колпака, и не все гномы сдали пустые бумажки, то Белоснежка покормит гномов обедом. Гномы могут заранее обсудить свою стратегию, но только до надевания колпаков. Докажите, что всё равно хотя бы в $\frac{1}{8}$ случаев гномы останутся голодными.

10-1 **Усреднение** 28 сентября 2020

1. Есть два ожерелья, в каждом из которых по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Ксюша хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое наибольшее число совпадающих бусинок Ксюша может гарантированно получить?

2. В таблице 20×20 в каждой клетке лежит пончик или крендель, причём в каждом столбце лежит ровно 10 пончиков. Докажите, что найдутся две строки, у которых в пересечении с хотя бы 10 столбцами лежит одно и то же.

3. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперёд. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовём *временем перевода*. Требуется установить все часы так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

4. В городе N хотя бы 1000 жителей. У каждого из них знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно провести выборы мэра города из двух кандидатов так, что в них примет участие не менее половины жителей.

5. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его рёбер так, чтобы вершины оставшегося графа можно было покрасить правильным образом в n цветов.

6. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одинакового веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

7. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Два растения считаются *непохожими*, если они различаются хотя бы по 51 признаку. Докажите, что в справочнике не может находиться более 50 попарно непохожих растений.

8. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед обедом Белоснежка надевает случайным образом на каждого гнома красный или синий колпак. Гномы видят все колпаки, кроме своего, и пытаются угадать цвет своего колпака. Они пишут на бумажке предполагаемый цвет своего колпака или сдают пустую бумажку. Если все гномы, сдавшие непустые бумажки, угадали цвет своего колпака, и не все гномы сдали пустые бумажки, то Белоснежка покормит гномов обедом. Гномы могут заранее обсудить свою стратегию, но только до надевания колпаков. Докажите, что всё равно хотя бы в $\frac{1}{8}$ случаев гномы останутся голодными.