Балакин А. А., Гусев А. С., Кушнир А. Ю., Ретинский В. И.

Ряды Фарея

Рассмотрим последовательность всех правильных дробей со знаменателями, не превосходящими n, выписанных в порядке возрастания. Для удобства добавим также дробь $\frac{0}{1}$ в начало ряда и $\frac{1}{1}$ в конец. Полученный ряд называется *рядом Фарея порядка* n. Обозначим ряд Фарея порядка n через Φ_n.

$\Phi_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$

$\Phi_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$

$\Phi_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$

$\Phi_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$

$\Phi_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$

Медиантой двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ назовем дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Для доказательства свойств рядов Фарея построим вспомогательную последовательность рядов Φ'_n. $\Phi'_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$, а Φ'_n получается из Φ'_{n-1} следующим образом: мы ищем все пары соседних в Φ'_{n-1} дробей с суммой знаменателей n, и вставляем их медианты в соответствующие промежутки.

Нетрудно убедиться, что первые несколько Φ'_n совпадают с Φ_n. (Убедитесь в этом!)

Наша цель: доказать, что $\Phi_n = \Phi'_n$.

1. **(a)** Докажите, что дроби в Φ'_n идут в порядке возрастания.
(b) Пусть дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — соседние в Φ'_n. Тогда $|ad - bc| = 1$.
(c) Пусть дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — соседние в Φ'_n. Тогда их медианта — дробь с наименьшим знаменателем среди всех дробей, лежащих между ними.
(d) Докажите, что ряды Φ_n и Φ'_n совпадают.

2. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — такие правильные дроби, что $|ad-bc| = 1$. Докажите, что тогда найдется такое n, что $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — соседние в Φ_n.

3. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что
(a) для любого q найдется такое p, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q}$;
(b) для любого n найдется такая дробь $\frac{p}{q}$, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$ и $0 < q \leqslant n$.

4. **(a)** Докажите, что площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (a,b), (c,d) равна $\frac{|ad-bc|}{2}$. $(a,b,c,d > 0.)$
(b) Кузнечики могут находиться только в целых точках 1-ого квадранта плоскости. Изначально 4 кузнечика находятся в вершинах параллелограмма площади 1, причем один из них находится в начале координат. За ход один из них может перепрыгнуть на другое место, но так, чтобы кузнечики все еще

находились в вершинах некоторого параллелограмма. Докажите, что такими операциями они могут перепрыгнуть в вершины $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.