Трезубец

1. *(Лемма о трезубце)* Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Через M обозначим середину дуги BC описанной вокруг ABC окружности, не содержащей A. Тогда точки B, C, I и I_A лежат на одной окружности с центом в M.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что:

   1. центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, ACD и ABD образуют прямоугольник.

   2. стороны этого прямоугольника параллельны биссектрисам угла между диагоналями.

3. В треугольнике ABC отмечен центр вписанной окружности I и точка P, удовлетворяющая условию $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AI \leqslant AP$, причем равенство достигается только в случае $P = I$.

4. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что $IO = IH$, где I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр.

5. В треугольнике ABC $(AB > AC)$ $\angle A = 60°$. Через I и H обозначим центр вписанной окружности и ортоцентр соответственно. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle B$.

6. Точки A_1, B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центра вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

7. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω $(AD \parallel BC)$. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD касаются оснований BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.

[СУНЦ МГУ, Олимпиадная математика] Трещёв
[*2019-2020*] группа: Догоняющие *11 марта 2020 г.*

Трезубец

1. *(Лемма о трезубце)* Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Через M обозначим середину дуги BC описанной вокруг ABC окружности, не содержащей A. Тогда точки B, C, I и I_A лежат на одной окружности с центом в M.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что:

   1. центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, ACD и ABD образуют прямоугольник.

   2. стороны этого прямоугольника параллельны биссектрисам угла между диагоналями.

3. В треугольнике ABC отмечен центр вписанной окружности I и точка P, удовлетворяющая условию $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AI \leqslant AP$, причем равенство достигается только в случае $P = I$.

4. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что $IO = IH$, где I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр.

5. В треугольнике ABC $(AB > AC)$ $\angle A = 60°$. Через I и H обозначим центр вписанной окружности и ортоцентр соответственно. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle B$.

6. Точки A_1, B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центра вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

7. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω $(AD \parallel BC)$. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD касаются оснований BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.