[СУНЦ МГУ, Олимпиадная математика] Доледенок, Воронин
[*2019-2020*] группа: Убегающие *6 марта 2020 г.*

Геометрия

1. Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что
$$a + A = b + B = c + C = S.$$
Докажите, что $aB + bC + cA \leqslant S^2$.

2. Числа a, b, c, d лежат в интервале $(0, 1)$. Докажите, что
$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-d)^2} + \sqrt{d^2 + (1-a)^2} < 4.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

4. Докажите неравенство
$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < 25 \cdot 315.$$

5. Дана невозрастающая последовательность неотрицательных чисел
$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2k+1} \geqslant 0.$$
Докажите неравенство:
$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \ldots + a_{2k+1}^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2k+1})^2.$$

6. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

7. Сумма n чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна единице. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, произведение которых не больше $-1/n$.

[СУНЦ МГУ, Олимпиадная математика] Доледенок, Воронин
[*2019-2020*] группа: Убегающие *6 марта 2020 г.*

Геометрия

1. Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что
$$a + A = b + B = c + C = S.$$
Докажите, что $aB + bC + cA \leqslant S^2$.

2. Числа a, b, c, d лежат в интервале $(0, 1)$. Докажите, что
$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-d)^2} + \sqrt{d^2 + (1-a)^2} < 4.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

4. Докажите неравенство
$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < 25 \cdot 315.$$

5. Дана невозрастающая последовательность неотрицательных чисел
$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2k+1} \geqslant 0.$$
Докажите неравенство:
$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \ldots + a_{2k+1}^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2k+1})^2.$$

6. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

7. Сумма n чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна единице. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, произведение которых не больше $-1/n$.