

Разнойбой перед ММО

1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей (правильная дробь — это дробь, у которой числитель меньше знаменателя)?
2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k , что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.
3. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
4. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника ABC . Две равные окружности касаются сторон AB , BC и AC , BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K . Оказалось, что K лежит на прямой OI . Найдите $\angle BAC$.
5. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:
(а) $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$; (б) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$?
6. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?
7. Докажите, что для всех $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты.

Добавка для 11 класса

1. Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?
2. Найдите такое значение a , что уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.
3. При какой перестановке $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ чисел $1, 2, \dots, 2020$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3 \dots^{a_{2019}^{a_{2020}}}}}$$

будет наибольшим?