ТЧ с комбинаторным привкусом

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате сумма делилась на 1001.

2. **(a)** На доске написано n целых чисел. Докажите, что среди них найдутся несколько, сумма которых кратна n.
(b) То же самое, но на доске $n-1$ целое число, не все из них имеют одинаковые остатки при делении на n.

3. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

4. Докажите, что для любого простого p существуют такие натуральные x и y такие, что $1+x^2+y^2 \vdots p$.

5. Докажите, что найдётся число, представимое в виде суммы квадратов четырёх чисел более чем миллионом различных способов.

6. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, $\times$, : и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

7. Дано натуральное число n. Рассмотрим множество всех целых чисел, по модулю не превосходящих n. Какое наибольшее число элементов можно выбрать из этого множества так, чтобы не нашлось трех различных выбранных чисел a, b и c, для которых $a+b=c$?

8. Пусть p — нечетное простое число. Найдите число подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, p\}$, сумма элементов которых делится на $2p$.