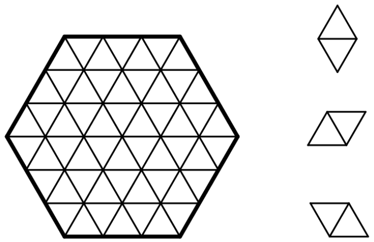
Тренировочная олимпиада, 10 класс

1. Найдите все тройки действительных чисел (a, b, c) с $a \neq b$, $ab \neq 0$ такие, что параболы
$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{и} \quad y = bx^2 + cx + a$$
имеют общую вершину.

2. На координатной прямой отмечено несколько точек (больше двух). Каждая точка, кроме двух крайних, находится ровно посередине между какими-то двумя отмеченными. Могут ли все отрезки, внутри которых нет отмеченных точек, иметь различные длины?

3. На доске написано число $1000!$. Пётр проделывает следующую операцию: он выбирает число $n!$, являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному. Результат записывается на доске, а результат стирается. Докажите, что независимо от выбираемых чисел на доске когда-нибудь появится число $2020!$.

4. Правильный шестиугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Этот шестиугольник замостили плитками в виде ромбиков, каждая из которых покрывает два треугольничка. Докажите, что плиток, расположенных каждым из трёх способов, в этом замощении встретится поровну.



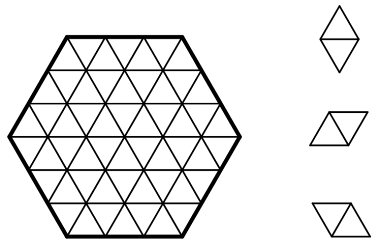
5. Точки M и N — середины сторон AB и AC остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка T — середина не содержащей вершины A дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AMT пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AC в точке X, описанная окружность треугольника ANT пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке Y, причём точки X и Y лежат внутри треугольника ABC. Прямые MN и XY пересекаются в точке K. Докажите, что $KA = KT$.

Тренировочная олимпиада, 11 класс

1. На координатной прямой отмечено несколько точек (больше двух). Каждая точка, кроме двух крайних, находится ровно посередине между какими-то двумя отмеченными. Могут ли все отрезки, внутри которых нет отмеченных точек, иметь различные длины?

2. На доске написано число $1000!$. Пётр проделывает следующую операцию: он выбирает число $n!$, являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному. Результат записывается на доске, а результат стирается. Докажите, что независимо от выбираемых чисел на доске когда-нибудь появится число $2020!$.

3. Правильный шестиугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Этот шестиугольник замостили плитками в виде ромбиков, каждая из которых покрывает два треугольничка. Докажите, что плиток, расположенных каждым из трёх способов, в этом замощении встретится поровну.



4. Найдите внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ГМТ P таких, что в каждую из шести пирамид $PABCD$, $PABB_1A_1$, $PBCC_1B_1$, $PCDD_1C_1$, $PDAA_1D_1$, $PA_1B_1C_1D_1$ можно вписать сферу.

5. Существуют ли такие действительные x, что числа $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2014x$ оба целые?