

Подготовка к региону. Геометрия

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что четырёхугольник $AMNC$ вписанный и радиусы окружностей, описанных около четырёхугольника $AMNC$ и треугольника BMN равны. Докажите, что ортоцентр треугольника MBN совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC .
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Продолжения противоположных сторон этого четырёхугольника пересекаются в точках M и N . Докажите, что описанная окружность треугольника AMN касается ω тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника CMN касается ω .
3. На высоте AH остроугольного треугольника ABC выбрана точка D , отличная от ортоцентра. Точки M и N симметричны D относительно сторон AB и AC . Докажите, что описанный окружности треугольников ABM и ACN второй раз пересекаются в точке, симметричной D относительно прямой BC .
4. Дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2 \dots A_8$ такой, что

$$\angle A_1A_4A_5 = \angle A_2A_5A_6 = \dots = \angle A_7A_2A_3 = \angle A_8A_3A_4 = 90^\circ.$$

Докажите, что восьмиугольник можно вписать в окружность.

5. Из точки A , расположенной вне окружности ω , проведены две касательные AB и AC к этой окружности. Точка D лежит на ω и диаметрально противоположна точке C . Точка H — основание перпендикуляра из точки B на прямую CD . Докажите, что прямая AD делит отрезок BH пополам.
6. Описанная окружность четырёхугольника $ABCD$ отражается симметрично относительно сторон AB и AD . Построенные окружности вторично пересекаются в точке A' . Аналогично определяются точки B' , C' , D' . Докажите, что четырёхугольники $ABCD$ и $C'D'A'B'$ равны.
7. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырёхугольник, то и $ADML$ тоже вписан.
8. Дан остроугольный треугольник ABC . На продолжениях сторон AC за точку C , CB за точку B , BA за точку A взяты соответственно точки B_1 , A_1 , C_1 так, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC .

Добавка для 11 класса

1. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC , и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
2. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвёртое боковое ребро также является хорошим.
3. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)
4. В тетраэдре проведены высоты BE и CF . Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A , C , D и E лежат на одной окружности, и точки A , B , D , F лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.