

Многочлены

1. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2020$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
2. Решите уравнение $(1 + x + x^2)(1 + x + \dots + x^{10}) = (1 + x + \dots + x^6)^2$.
3. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.
4. Докажите, что среди коэффициентов многочлена $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2020}$ есть отрицательные числа.
5. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ известно, что

$$f(1) = f(11), f(2) = f(10), \dots, f(5) = f(7).$$

Обязательно ли $f(0) = f(12)$?

6. Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени 6, что для любого x выполнено равенство $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?
7. Докажите, что многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
8. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что найдется целое k такое, что числа $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2020)$ составные.
9. Фома задумал многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Ерема пытается отгадать этот многочлен. Сначала Ерема называет целое число a , и Фома сообщает ему значение $P(a)$. Затем Ерема называет целое число b , и Фома сообщает ему значение $P(b)$. Как Ереме выбирать числа a и b , чтобы отгадать многочлен P ?
10. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2019 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, \dots, n_k , и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \dots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

Многочлены

1. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2020$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
2. Решите уравнение $(1 + x + x^2)(1 + x + \dots + x^{10}) = (1 + x + \dots + x^6)^2$.
3. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.
4. Докажите, что среди коэффициентов многочлена $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2020}$ есть отрицательные числа.
5. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ известно, что

$$f(1) = f(11), f(2) = f(10), \dots, f(5) = f(7).$$

Обязательно ли $f(0) = f(12)$?

6. Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени 6, что для любого x выполнено равенство $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?
7. Докажите, что многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
8. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что найдется целое k такое, что числа $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2020)$ составные.
9. Фома задумал многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Ерема пытается отгадать этот многочлен. Сначала Ерема называет целое число a , и Фома сообщает ему значение $P(a)$. Затем Ерема называет целое число b , и Фома сообщает ему значение $P(b)$. Как Ереме выбирать числа a и b , чтобы отгадать многочлен P ?
10. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2019 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, \dots, n_k , и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \dots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?