Подготовка к региону. Алгебра и ТЧ

1. Найдите все такие натуральные n, что число $4^{n+1}+2^{n+1}+1$ делится на 4^n+2^n+1.

2. Существуют ли такие положительные числа a, b, c, x, что

$$c^2=a^2+b^2 \quad \text{и} \quad (c+x)^2=(a+x)^2+(b+x)^2\,?$$

3. Маша написала на доску несколько последовательных натуральных чисел. Затем Катя вместо каждого числа записала его
(a) сумму; **(b)** произведение цифр.
Все полученные Катей числа оказались различными. Какое наибольшее количество чисел могла написать Маша?

4. Можно ли выбрать 100 последовательных чётных чисел и разбить их на пары (a_1,b_1), (a_2,b_2), $\ldots$, (a_{50},b_{50}) так, чтобы каждое из уравнений

$$x^2+a_1x+b_1=0,\ x^2+a_2x+b_2=0,\ \ldots,\ x^2+a_{50}x+b_{50}=0$$

имело целые корни?

5. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a^2b}{a+2b}+\frac{b^2c}{b+2c}+\frac{c^2a}{c+2a}<\frac{(a+b+c)^2}{8}\,.$$

6. Даны положительные числа a и b. Известно, что для всех натуральных $k\geqslant 10000$ выполнено: $[a]^k+[b]^k=[a^k]+[b^k]$. Докажите, что

$$[a]^{1000}+[b]^{1000}=[a^{1000}]+[b^{1000}]\,.$$

7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

8. По кругу расставлены n чисел ($n>1000$), не все из которых равны. Известно, что сумма любых 13 стоящих подряд чисел не превосходит 13, а сумма любых 21 стоящих подряд чисел не превосходит 21. Докажите, что сумма всех чисел строго меньше n.