Инвариант

1. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

2. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент каждый из жуков переполз на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что теперь найдется пустая клетка.

3. На хоккейной площадке лежит три шайбы, пронумерованные числами 1, 2, 3. Хоккеист Вася выбирает какую-то из них и бьет по ней так, что она пролетает между двумя другими. Он делает такие удары снова и снова. Может ли так оказаться, что после 2019 ударов каждая шайба лежит на своем первоначальном месте? В момент, когда шайбы не движутся, они не лежат на одной прямой.

4. Круг разделен на 6 секторов, в котором по часовой стрелке стоят числа $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Можно прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

5. В одной вершине куба записано число 1, в остальных — числа 0. За один шаг к двум соседним по ребру числам можно добавить по 1. Можно ли сделать все числа одинаковыми?

6. Имеется коробка с прямоугольным дном и набор плиток, которыми можно замостить дно коробки. Каждая плитка имеет размер либо 1×4, либо 2×2. Петя заменил одну плитку 1×4 на плитку 2×2. Могло ли оказаться, что новым набором плиток снова можно замостить дно коробки?

7. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке, причем хотя бы одна из угловых клеток черная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в черный цвет, каждую черную — в зеленый, а каждую зеленую — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой черный и белый цвета поменялись местами?

8. Бесконечная шахматная доска представляет собой четверть плоскости с левым нижним углом. Изначально в угловой клетке лежит фишка. За ход можно убрать фишку из какой-либо клетки X и положить две новые фишки по одной в клетки выше X и правее X. (Ход возможен, только если обе эти клетки свободны). Можно ли за несколько таких операций добиться того, что в левом нижнем квадрате 3×3 нет фишек?