Добавка по изогональному сопряжению

Ещё пара полезных фактов

1. Точка P лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и проекции точки P на прямые, содержащие стороны, попадают на стороны. Докажите, что для точки P существует изогонально сопряжённая относительно четырёхугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда
(a) основания перпендикуляров из точки P на стороны являются вершинами вписанного четырёхугольника;
(b) верно соотношение $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$.

2. Докажите, что окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, но не проходящая через вершину A, при изогональном сопряжении переходит в окружность, проходящую через вершины B и C, но не проходящую через вершину A.

Просто задачи

3. На окружности, проходящей через вершины B и C треугольника ABC и через центр его вписанной окружности выбраны такие точки P и Q лежащие внутри треугольника, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

4. *(Всерос 2017, 11.8)* Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через IA, IB, IC и ID центры вписанных окружностей ω_A, ω_B, ω_C и ω_D треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что

$$\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180^\circ\,.$$

Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$.

5. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Прямая AP повторно пересекает окружность, описанную около треугольника BPC в точке P'. Прямая AQ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника BQC в точке Q'. Докажите, что точки P' и Q' изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

6. Пусть P — точка внутри треугольника ABC такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC\,.$$

Докажите, что биссектрисы углов ABP и ACP пересекаются на прямой AP.