Про многочлены

1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

2. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ одинаковый набор целых коэффициентов с, возможно, различным порядком. Докажите, что $P(321) - Q(321)$ делится на 64.

3. Даны целые числа p и q такие, что многочлен $x^3 + px + q$ имеет 3 корня (не обязательно целых). Докажите, что сумма кубов корней делится на 3.

4. Дан многочлен нечетной степени $P(x)$. Докажите, что у уравнения $P(P(x)) = 0$ различных действительных корней не меньше, чем у уравнения $P(x) = 0$.

5. Докажите, что если число $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, является корнем многочленом с целыми коэффициентами, то и число $a - b\sqrt{2}$ является корнем этого многочлена.

6. Про многочлен $P(x)$ десятой степени известно, что

$$P(1) = P(10),\ P(2) = P(9),\ \ldots,\ P(5) = P(6)\,.$$

Докажите, что график $P(x)$ имеет ось симметрии.

7. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что

$$P(1) = 1,\ P(2) = 8,\ P(3) = 27,\ P(5) = 125,\ P(6) = 216,\ P(7) = 343.$$

Какое наименьшее возможное значение может принимать $|P(4)|$?

8. Про числа a, b, c, d известно, что

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}},\ b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}},\ c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}},\ d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}.$$

Чему равно произведение $abcd$?