Зри в корень!

1. *(Шутка).* Найдите все такие пары чисел p и q, что оба они являются корнями трехчлена $x^2 + px + q$.

2. Известно, что $(a + b + c)c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

3. Существуют ли такие 100 квадратных трёхчленов, что каждый из них имеет два корня, а сумма любых двух из них корней не имеет?

4. Дан многочлен нечетной степени $P(x)$. Докажите, что у уравнения $P(P(x)) = 0$ различных корней не меньше, чем у уравнения $P(x) = 0$.

5. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?

6. Даны многочлен $P(X)$ и такие числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3)$$

для любого действительного x. Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

7. Многочлен

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$$

с неотрицательными коэффициентами имеет n действительных корней. Доказать, что $P(2) \geqslant 3^n$.