

## Неоднородность

- (а) Существуют ли 2019 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится суммой всех чисел?  
(б) Существуют ли 2019 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на их сумму?
- Существует ли арифметическая прогрессия из 2019 членов с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид  $\frac{1}{n}$  для некоторого натурального  $n$ ?
- Существуют ли различные натуральные числа  $a, b, c$ , большие  $10^{10}$ , такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2019?
- Представимо ли число  $2016^{2017}$  в виде суммы кубов четырёх различных натуральных чисел?
- (а) Существуют ли натуральные  $a, b, c$  такие, что  $a^{2015} + b^{2016} = c^{2017}$ ?  
(б) Существуют ли натуральные  $a, b, c$  (причём  $a$  — нечётное) такие, что  $a^{2016} + b^{2016} = c^{2017}$ ?
- Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2017$ . Обязательно ли число  $abc$  является  
(а) точным квадратом; (б) точным кубом?
- Существуют ли натуральные числа  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2019}$  такие, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{2018}, a_{2019})?$$

- Дано натуральное число  $n$ . Существуют ли  $n$  различных натуральных чисел таких, что их сумма является точной 2016-й степенью, а их произведение — точной 2017-й степенью?
- Натуральное число  $N$  представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — квадраты,  $b_1$  и  $b_2$  — кубы,  $c_1$  и  $c_2$  — пятые степени, а  $d_1$  и  $d_2$  — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел  $a_1, b_1, c_1$  и  $d_1$  найдутся два равных?