

Радикальные оси

1. С помощью циркуля и линейки постройте радикальную ось двух данных окружностей.
2. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит ее на три отрезка. Обойдем контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета. Докажите, что сумма красных отрезков равна сумме синих.
3. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.
4. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R , пересекаются под прямым углом в точке P , удаленной на расстояние d от центра окружности. Докажите, что $AC^2 + BD^2 = 8R^2 - 4d^2$.
5. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой PQ .
6. На плоскости даны окружность ω , точка A , лежащая внутри ω и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω , и хорда XY проходит через точку A . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY , лежат на одной прямой.