

Фиксированные и поехавшие точки

Как правило, в геометрических задачах, в которых просят доказать, что что-то проходит через фиксированную точку, есть две части: догадаться, что это за точка, а затем доказать, что эта точка действительно подходит. Догадываться удобно, рассматривая частные, вырожденные или предельные случаи.

0. (Задача для осознания.)

(а) Точки A , B , C стремятся в одну точку. Обязательно ли в эту же точку стремится точка пересечения медиан, ортоцентр, центр описанной окружности треугольника ABC ?

(б) Точка B на окружности ω стремится к точке A этой окружности. К какой прямой стремится прямая AB ?

(с) Вершина C треугольника ABC по лучу BC стремится к бесконечности. К какой точке стремится точка пересечения этой окружности с некоторой фиксированной прямой ℓ ?

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D . Произвольный луч l , выходящий из вершины B , пересекает отрезок AC в точке X , а описанную окружность треугольника ABC — в точке Y . Докажите, что описанная окружность треугольника DXY проходит через фиксированную точку, отличную от D , и не зависящую от выбора луча l .
2. Пусть X — некоторая фиксированная точка на стороне AC треугольника ABC (X отлична от A и C). Произвольная окружность, проходящая через X и B , пересекает отрезок AC и описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q , отличных от X и B . Докажите, что все возможные прямые PQ проходят через одну точку.
3. На дуге AB окружности ω выбрана произвольная точка X . Через середину Y отрезка BX проведена прямая ℓ , перпендикулярная AX . Докажите, что все прямые ℓ проходят фиксированную точку, не зависящую от выбора точки X .
4. Точки A и P лежат вне прямой l . Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на l . Докажите, что описанные окружности треугольников PBC имеют общую точку, отличную от P .

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка X . Прямые, проходящие через X параллельно AB и AC , пересекают стороны AC и AB в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников BQX и CPX пересекаются в точке Y . Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки X .
6. На диаметре AB выбрана точка C , отличная от центра окружности. По одну сторону от этого диаметра на окружности взяты произвольные различные точки X и Y , причём отрезки CX и CY образуют равные углы с прямой AB . Докажите, что прямые XY проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора точек X и Y .
7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P , отличная от A и D . Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P .
8. На плоскости даны точки A и B , а также прямая l , проходящая через точку B . Рассмотрим произвольную окружность ω , касающуюся прямой l в точке B и не содержащую внутри себя точку A . Касательные к ω , проведённые из точки A , касаются ω в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω .
9. Из точки A к окружности ω проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD , проходит через фиксированную точку (отличную от D).