

## Фиксированные и поехавшие точки

Как правило, в геометрических задачах, в которых просят доказать, что что-то проходит через фиксированную точку, есть две части: догадаться, что это за точка, а затем доказать, что эта точка действительно подходит. Догадываться удобно, рассматривая частные, вырожденные или предельные случаи.

0. (Задача для осознания.)

(а) Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  стремятся в одну точку. Обязательно ли в эту же точку стремится точка пересечения медиан, ортоцентр, центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ?

(б) Точка  $B$  на окружности  $\omega$  стремится к точке  $A$  этой окружности. К какой прямой стремится прямая  $AB$ ?

(с) Вершина  $C$  треугольника  $ABC$  по лучу  $BC$  стремится к бесконечности. К какой точке стремится точка пересечения этой окружности с некоторой фиксированной прямой  $\ell$ ?

1. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ . Произвольный луч  $l$ , выходящий из вершины  $B$ , пересекает отрезок  $AC$  в точке  $X$ , а описанную окружность треугольника  $ABC$  — в точке  $Y$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $DXY$  проходит через фиксированную точку, отличную от  $D$ , и не зависящую от выбора луча  $l$ .
2. Пусть  $X$  — некоторая фиксированная точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  ( $X$  отлична от  $A$  и  $C$ ). Произвольная окружность, проходящая через  $X$  и  $B$ , пересекает отрезок  $AC$  и описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $P$  и  $Q$ , отличных от  $X$  и  $B$ . Докажите, что все возможные прямые  $PQ$  проходят через одну точку.
3. На дуге  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана произвольная точка  $X$ . Через середину  $Y$  отрезка  $BX$  проведена прямая  $\ell$ , перпендикулярная  $AX$ . Докажите, что все прямые  $\ell$  проходят фиксированную точку, не зависящую от выбора точки  $X$ .
4. Точки  $A$  и  $P$  лежат вне прямой  $l$ . Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники  $ABC$  с гипотенузой, лежащей на  $l$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $PBC$  имеют общую точку, отличную от  $P$ .

5. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $X$ . Прямые, проходящие через  $X$  параллельно  $AB$  и  $AC$ , пересекают стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $BQX$  и  $CPX$  пересекаются в точке  $Y$ . Докажите, что прямая  $XY$  проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки  $X$ .
6. На диаметре  $AB$  выбрана точка  $C$ , отличная от центра окружности. По одну сторону от этого диаметра на окружности взяты произвольные различные точки  $X$  и  $Y$ , причём отрезки  $CX$  и  $CY$  образуют равные углы с прямой  $AB$ . Докажите, что прямые  $XY$  проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора точек  $X$  и  $Y$ .
7. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  с попарно непараллельными сторонами. На стороне  $AD$  выбирается произвольная точка  $P$ , отличная от  $A$  и  $D$ . Описанные окружности треугольников  $ABP$  и  $CDP$  вторично пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что прямая  $PQ$  проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки  $P$ .
8. На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ , а также прямая  $l$ , проходящая через точку  $B$ . Рассмотрим произвольную окружность  $\omega$ , касающуюся прямой  $l$  в точке  $B$  и не содержащую внутри себя точку  $A$ . Касательные к  $\omega$ , проведённые из точки  $A$ , касаются  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямая  $XY$  проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности  $\omega$ .
9. Из точки  $A$  к окружности  $\omega$  проведена касательная  $AD$  и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$  ( $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ ). Докажите, что окружность, проходящая через точки  $C$  и  $D$  и касающаяся прямой  $BD$ , проходит через фиксированную точку (отличную от  $D$ ).