Ориентированные графы

Для тех, кто в танке

1. В некотором государстве 101 город.
(a) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
(b) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

Определение. Ориентированный граф называется *связным*, если он превращается в связный граф при «стирании» ориентации ребер. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

2. В связном ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

3. **(a)** Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.
(b) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n-2$ рёбер, причём оценка точная.

4. Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину A. Докажите, что граф сильно связный.

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется *турниром*.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

5. **(a)** Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(b) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

6. В турнире с n вершинами посчитаем две величины: P — сумма квадратов выходящих степеней всех вершин, Q — сумма квадратов входящих степеней всех вершин. Докажите, что $P = Q$.

Для тех, кто не в танке

7. Докажите, что в сильно связном турнире с $n > 4$ вершинами существует хотя бы 2 вершины такие, что при удалении одной из них сильная связность графа не теряется.

8. **(a)** Докажите, что в сильно связном турнире с n вершинами для любого k $(3 \leqslant k \leqslant n)$ и любой вершины существует простой цикл длины k, проходящий через эту вершину.
(b) Докажите, что в сильно связном турнире хотя бы $n + 1 - k$ простых циклов длины k, причём оценка точная.

9. В ориентированном графе на n вершинах любые две вершины соединяет не более одного ребра. Какое наибольшее количество циклов длины 3 в нём может быть?

10. Пусть k — натуральное число, меньшее чем количество вершин турнира. Докажите, что если для любых k вершин найдется вершина, из которой стрелки ведут в каждую из этих k вершин, то всего вершин не меньше
(a) $2^{k+1} - 1$;
(b) $(k + 2) \cdot 2^{k-1} - 1$.