Около систем счисления

Задачи попроще

1. Имеется 100 палочек, из которых можно сложить 100-угольник. Может ли случиться, что ни из какого меньшего числа этих палочек нельзя сложить невырожденный многоугольник?

2. Покажите, что любое натуральное число n может быть представлено в виде
$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3\,,$$
где x, y, z — такие целые числа, что $0 \leqslant x < y < z$, либо $0 = x = y < z$.

3. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде
$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots\,,$$
где $0 \leqslant a_i \leqslant i$ для всех i.

4. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что у многочлена найдётся коэффициент, который меньше -1.

5. Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет? (Весы будут в равновесии, если сумма моментов гирь справа от середины равна сумме моментов гирь слева; иначе отклонятся в сторону, где сумма больше. *Моментом* гири называется произведение ms массы гири m на расстояние s он нее до середины отрезка.)

6. **(a)** Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое число граммов от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть на одну чашу весов?
(b) То же самое, только гири можно класть на обе чаши весов.

Задачи поинтереснее

7. У продавца и покупателя в сумме 1999 рублей монетами и купюрами в 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей. Кот в мешке стоит целое число рублей, причём денег у покупателя достаточно. Докажите, что покупатель сможет купить кота, получив причитающуюся сдачу.

8. Существуют ли 100 прямоугольников, из которых можно составить любой клетчатый прямоугольник со сторонами, не превосходящими 1000?

9. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, еще один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

10. Имеется цепочка из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 грамм. Какое наименьшее число звеньев надо расковать так, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до 150 грамм (раскованное звено тоже весит 1 грамм)?

11. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

12. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нём уже содержится, из любого другого сосуда. Каждый из сосудов может вместить всю имеющуюся в них воду. Докажите, что можно несколькими переливаниями освободить один из сосудов.

13. Есть n гирь, никакие две гири не весят одинаково. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах можно определить самую тяжёлую гирю?