Многочлены.

Многочленом называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, где x – неизвестная (переменная), n – неотрицательное целое число, коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ – какие-то числа. У слова «многочлен» есть синоним – **полином**.

Число n называется **степенью** многочлена, обозначается как $degP$. Степень нулевого многочлена ($P(x) = 0$) считается $-\infty$.

Число $a_n \neq 0$ называется **старшим** коэффициентом многочлена, а a_0 – **свободным** коэффициентом.

1. Придумайте многочлен $P(x)$ такой, что
- **(a)** $P(1) = 8$;
- **(b)** $P(2) = 8$;
- **(c)** степень $P(x) = 4$ и $P(1) = 5$;
- **(d)** степень $P(x) = 2$ и $P(2) = 7$;
- **(e)** степень $P(x) = 3$ и $P(-1) = 0$;
- **(f)** степень $P(x) = 4$ и $P(-1) = 0$;
- **(g)** степень $P(x) = 3$, $P(1) = 7$ и $P(0) = 3$;
- **(h)** $P(2) = 0$ и $P(3) = 0$;

2. Придумайте многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ третьей степени, такие что степень $P(x) + Q(x)$ равна двум.

3. Придумайте многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ третьей степени, у которых все коэффициенты различные и такие, что все коэффициенты многочлена $P(x) + Q(x)$ простые числа.

4. Придумайте многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, такие что степень $P(x) \cdot Q(x)$ равна пяти.

5. Пусть степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равна 4 и 5, соответственно. Какова степень многочленов $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$, $P(Q(x))$?

6. Многочлен $P(x)$ имеет степень 2, старший коэффициент тоже равен двум и известно, что $P(4) = 1, P(-2) = -1$. Найдите $P(x)$.

7. Дан многочлен $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4$. Найдите многочлен $P(x - 1)$.

8. Дан многочлен $P(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Найдите многочлен $P(x)$.