

Бином Ньютона

Подумаешь, бином Ньютона!

Мастер и Маргарита

Напоминание.

В треугольнике Паскаля на n строке на местах $0, 1, 2 \dots n$ стоят числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2 \dots C_n^n$.

- Сколько всего слагаемых получится после раскрытия скобок в выражении $(y + x)^n$:
 - без приведения подобных слагаемых;
 - после приведения подобных слагаемых?
- Сколько слагаемых вида ab^7 получится до приведения подобных слагаемых при раскрытии скобок в выражении $(a + b)^8$?
 - Сколько слагаемых вида a^3b^{14} получится до приведения подобных слагаемых при раскрытии скобок в выражении $(a + b)^{17}$?
 - Сколько слагаемых вида $a^k b^{n-k}$ получится до приведения подобных слагаемых при раскрытии скобок в выражении $(a + b)^n$?
- Докажите формулу **бинома Ньютона**:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

- с помощью задачи 2;
- с помощью метода математической индукции.

- Вычислите, **не используя калькулятор и умножение в столбик**:

(a) 101^4 ; (b) 19^4 .

- Вычислите сумму:

$$C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5.$$

- Докажите с помощью бинома Ньютона:

(a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

(b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots \pm C_n^n = 0$;

(c) $C_{n+1}^k = C_n^{k+1} + C_n^k$.

- Решите уравнение:

$$32a^5 - 80a^4 + 80a^3 - 40a^2 + 10a = 244.$$

- Найдите число нулей, на которое оканчивается число $11^{100} - 1$.

- В разложении $(x + y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равным 240, третий – 720, а четвертый – 1080. Найдите x, y, n .

- (a) Докажите, что для простого p число C_p^k делится на p при $k = 1, 2 \dots p - 1$.

(b) Докажите, что $(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$.

(c) Докажите через Бином Ньютона **Малую теорему Ферма**: $a^p \equiv a \pmod{p}$ для любого натурального a .

- Докажите, что для $x \geq y \geq 0$ выполнено неравенство $x^n - y^n \geq (x - y)^n$.