Сравнения по модулю. Повторение.

textbfОпределение. *Остатком* числа a при делении на натуральное число b называется такое число r, что $a = b \cdot q + r$ для некоторого целого x и $0 \leqslant r < b$.

Осознайте! Два числа дают одинаковый остаток при делении на b тогда и только тогда, когда их разность делится на b.

Определение Целые числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n, если их разность делится на n. Это записывается как $a \equiv b\ mod\ n$.

Свойства сравнений.

- Если $a \equiv b\ mod\ n$, то $a + c \equiv b + c\ mod\ n$.
- Если $a \equiv b\ mod\ n$, то $ac \equiv bc\ mod\ n$.
- Если $a \equiv b\ mod\ n$, а $b \equiv c\ mod\ n$, то $a \equiv c\ mod\ n$.
- Если $a \equiv b\ mod\ n$, а $c \equiv d\ mod\ n$, то $a + c \equiv b + d\ mod\ n$.
- Если $a \equiv b\ mod\ n$, а $c \equiv d\ mod\ n$, то $ac \equiv bd\ mod\ n$.
- Если $a \equiv b\ mod\ n$, то $a^k \equiv b^k\ mod\ n$.
- Если $ac \equiv bc\ mod\ n$ и $(c, m) = 1$, то $a \equiv b\ mod\ n$.

Мысль №1. Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число a, можно заменять числа на их остатки при делении на a. Например, найдем остаток от деления числа $16 \cdot 17 \cdot 19$ на 3. Он будет таким же, как у $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

Мысль №2. А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток при делении числа 20^{14} на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на -1, получится $(-1)^{14} = 1$.

Учимся считать

1. Вычислите остаток числа:
(a) $5 \cdot 6 \cdot 7$ при делении на 4;
(b) 17^{150} на 16;
(c) 17^9 на 18;
(d) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
(e) $(138 + 50^{1228})^{21} \cdot 48^{31}$ на 7;
(f) a, если $4a \equiv 1\ (mod\ 7)$

2. Докажите, что $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится **(a)** на 999; **(b)** на 1004.

3. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

4. При каких степенях 3^k дает остаток 1 при делении на 10? А остаток 3?

5. Найдите остаток **(a)** 3^{1798} при делении на 10 **(b)** 17^{100} при делении на 7.

Учимся думать

6. Докажите, $1^{12345} + 2^{12345} + \ldots + 12344^{12345}$ делится на 12345.

7. Может ли число вида $\overline{111\ldots111}$ быть полным квадратом?

8. Докажите, что $(7^n - 5)^n - 12$ делится на $7^n - 12$.

9. Числа a, b, c – полные квадраты, причем $a + b + c$ делится на 9. Докажите, что разность каких-нибудь двух из этих чисел также делится на 9.

10. Найдите все простые числа p, q, r, удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.

11. Докажите, что натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы трех кубов целых чисел, бесконечно.