Обратные остатки

Ученые особенно подчеркивали, что все будет просто прекрасно, при условии, что никто не будет паниковать, а будет просто делать то, что должен, так, как должен.

Ресторан «У конца Вселенной»

1. Найдите все подходящие x и докажите, что других нет:
(a) $5x \underset{3}{\equiv} 2$; **(b)** $3x \underset{11}{\equiv} 2$; **(c)** $6x \underset{13}{\equiv} 1$;

2. Какой остаток дает число $x + y$ на 17, если
(a) $x - 16y \underset{17}{\equiv} 7$;
(b) $2x + 19y \underset{17}{\equiv} 14$;
(c) $3x \underset{17}{\equiv} 5 + 14y$.

3. Дано простое число p и его ненулевой остаток a.
(a) Докажите, что в последовательности $a \cdot 1, a \cdot 2, \ldots a \cdot (p - 1)$ все остатки разные.
(b) Докажите, что существует единственный остаток b, такой что $ab \underset{p}{\equiv} 1$.

Такой остаток называется **обратным остатком** для a.
(c) Какие остатки совпадают со своими обратными остатками?

Мораль. Можно ввести понятие остатка или сравнений по модулю для дробей, у которых знаменатель не кратен p. Если дана какая-нибудь дробь $\dfrac{m}{a}$, можно вычислить ее остаток от деления на простое p – он такой же, как и у mb, где b – обратный остаток a. Остатки для дробей подчиняются тем же законам, что и остатки для целых чисел – их можно складывать, умножать, вычитать (а теперь и делить!).

4. Докажите, что m делится на 101, если: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100} = \frac{m}{n}$

5. **(a)** **(Теорема Вильсона)** Докажите, что для простого p выполнено $(p - 1)! \underset{p}{\equiv} -1$.
(b) **(Обратная Теорема Вильсона)** Докажите, что если $(n-1)! \underset{n}{\equiv} -1$, то n – простое.

6. Докажите, что $100! + 1$ делится на 101.

7. В Москве каждую секунду один из жителей ест печеньку. Доказать, что если собрать все печеньки, съеденные за 6 недель и одну секунду, то их можно разделить на 11 равных кучек.

8. Пусть p – простое число. Докажите, что $(p - k)!(k - 1)! \underset{p}{\equiv} (-1)^k$.

9. **(a)** На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2} \ldots \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
(b) Пусть произведение каких-то $2k + 1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \underset{101}{\equiv} -n$.

10. Докажите, что для простого q выражение $(2q - 1)! - 1$ делится на q^2.