

## Разнойбой

Никто не может вернуться назад и начать все сначала, но любой человек может начать сегодня и создать новое окончание.

Сэмюэл Джонсон

1. Вычислите остаток числа:
  - (a)  $14^{15}$  на 13;
  - (b)  $12^9$  на 13;
  - (c)  $(118 + 17^{17})^{21} \cdot 7^{49}$  на 8;
  - (d)  $17^{100}$  при делении на 7.
2. Кирилл и Матвей делят одно и то же натуральное число с остатком. Кирилл делит его на 8, а Матвей на 9. Частное, которое получил Кирилл, и остаток, который получил Матвей, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Кирилла?
3. Сумма трёх чисел  $a, b, c$  делится на 30. Докажите, что сумма их пятых степеней тоже делится на 30.
4. В ряд записаны 10 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма делилась на 4.
5. В каждой клетке огромной доски  $5 \times 5$  сидит кролик. Заклинатель Иван повелевает кроликам прыгать, и каждый кролик прыгает в одну из соседних по углу клеток. Докажите, свободных клеток после этого хотя бы 5.
6. Можно ли раскрасить рёбра куба в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?
7. Доска  $8 \times 8$  покрыта костями домино. Восемь костей покрывают клетки диагонали, некоторые при этом закрывают ещё клетку выше диагонали, другие — ниже диагонали. Докажите, что тех и других костей поровну.
8. В четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  прямые, а диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. Докажите, что одна из диагоналей делит другую пополам.
9. В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) диагонали перпендикулярны. На стороне  $AD$  выбрана точка  $E$  такая, что  $BE = ED$ . Чему равно  $AE$ , если  $AD = 14$ ,  $BC = 6$ ?
10. Точка  $M$  — середина стороны  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . На стороне  $BC$  выбрана точка  $R$  так, что  $\angle AMR = 90^\circ$ . Найдите длину отрезка  $AR$ , если  $BR = x$ ,  $RC = y$ .