# Алгоритм Евклида

**Определение.** Наибольшим общим делителем (НОД) чисел $a$ и $b$ называется наибольшее натуральное число $d$ такое, что $a$ и $b$ делятся на $d$. Обозначение: $d = (a, b)$ или НОД$(a, b)$.

**Вспоминаем:** Если $d = (a, b)$, то $a = dm, b = dn$ для каких-то целых $m, n$.

**Вспоминаем:** Как найти НОД двух чисел по их разложению на простые множители?

**Вопрос:** Раскладывать на множители – долго и сложно. А можно как-то без этого?

**1.** Докажите, что $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

**2.** **(a)** Докажите, что $(a, b)$ делится на $(a - b, b)$.
**(b)** Докажите, что $(a - b, b)$ делится на $(a, b)$.
**(c)** Докажите, что $(a, b) = (a - k \cdot b, b)$, где $k$ – натуральное.

**Алгоритм Евклида** — способ найти НОД двух натуральных чисел, последовательно заменяя пару исходных чисел на пару из меньшего числа и остатка от деления большего на меньшее.

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & = & b & \cdot & q_1 & + & r_1 \\
b & = & r_1 & \cdot & q_2 & + & r_2 \\
r_1 & = & r_2 & \cdot & q_3 & + & r_3 \\
 & \ldots & & & & & \\
r_{n-1} & = & r_n & \cdot & q_{n+1} & + & r_{n+1} \\
r_n & = & r_{n+1} & \cdot & q_{n+2} & + & 0
\end{array}$$

**3.** Докажите, что алгоритм Евклида действительно находит НОД двух чисел, то есть что $(a, b) = r_{n+1}$.

**Практический блок – надо пользоваться 1, 2, 3**

**4.** На столе лежит клетчатая шоколадка $56 \times 12$. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?

**5.** Найдите $(99! + 100!, 101!)$.

**6.** Найдите: **(a)** $(451, 287)$; **(b)** $(\underbrace{11\ldots1}_{451}, \underbrace{11\ldots1}_{287})$; **(c)** $(2^{451} - 1, 2^{287} - 1)$.

**7.** **(a)** Найдите $(12n + 1, 30n + 2)$.
**(b)** Чему может быть равен $(30n + 5, 11n + 1)$?
**(c)** Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.

**8.** Есть два угольника (с углами $13^\circ$ и $145^\circ$) и карандаш. Как с их помощью построить угол $5^\circ$?

**9.** На доске записаны два числа: 36 и 25. Алиса и Олег играют в игру, Алиса начинает. За один ход можно выписать на доску модуль разности каких-нибудь двух чисел, записанных на доске, если это число раньше не было выписано. Кто выигрывает при правильной игре?