

## Рассуждения в графах

### Как могла выглядеть картинка?

1. Семь восьмиклассников поздоровались за руку. Известно, что Илья сделал шесть рукопожатий, Артём – пять, Петя и Эрнест – по три, Эмиль и Сергей – по два, Иван – одно. Кто с кем поздоровался?

### Допустим, найдутся двое незнакомых...

2. В стране Матвертикалия 21 город, некоторые из которых соединены дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 10 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая другие города).

### Посчитайте двумя способами

3. В школе каждый семиклассник дружит с 5 восьмиклассниками, а каждый восьмиклассник – с 7 семиклассниками. Кого в школе больше: восьмиклассников или семиклассников?

### Разнобой

4. Существует ли 8-вершинный граф, степени которого равны:  
(а) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1; (б) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1; (с) 7, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2?
5. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?
6. В Матвертикалии 10 крупных городов и 17 маленьких. Из каждого маленького города ведёт 5 дорог к крупным городам, а из каждого крупного – к 9 маленьким. Докажите, что между следующими городами есть путь по дорогам матвертикалии:  
(а) Мегполис и Супергород – крупные города.  
(б) Мегск и Суперск – маленькие города.  
(с) Мегполисом и Мегском.
7. На кружки ходят 24 восьмиклассника, при этом каждый знает хотя бы 12 других. Докажите, что можно выбрать из них четыре человека и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый знал двух своих соседей.
8. В супервертикали учатся 20 человек, при этом, какую бы тройку людей мы ни взяли, в ней всегда найдутся двое знакомых. Докажите, что кто-то в этой группе знает хотя бы 9 человек.
9. Каждый из 114 учащихся дружит хотя бы с 76 другими. Докажите, что тогда среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.
10. В компании у каждого двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.

**Если вы вдруг решили все – есть добавка!**