

Многочлены. Продолжение.

Определение. Корни многочлена $P(x)$ – это такие числа a , что $P(a) = 0$.

1. (а) Докажите, что у ненулевого многочлена степени n не может быть более n корней.
- (б) Многочлен имеет больше корней, чем его степень. Что можно сказать о нем?

Мораль. *Надо искать в задачах многочлены, имеющие «слишком много» корней. Для этого можно рассмотреть какой-нибудь вспомогательный многочлен.*

2. (а) Даны два многочлена P и Q степени n . Оказалось, что в точках a_1, \dots, a_{n+1} многочлены P и Q совпадают. Докажите, что тогда у них равны и все коэффициенты.
- (б) Можно ли это утверждать, если известно, что они совпадают в точках a_1, \dots, a_n ?

Мораль. Разные многочлены не могут совпадать в «большом» числе точек. Чтобы доказать, что два многочлена степени n равны, нужно найти хотя бы $n + 1$ точку, где они совпадают.

3. Докажите, что из системы ниже следует $x = y = z = 0$:

$$\begin{cases} x + ya + za^2 = 0, \\ x + yb + zb^2 = 0, \\ x + yc + zc^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найдите все корни уравнения, где a, b, c – различные числа:

$$(a) \quad a \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x,$$

$$(b) \quad a^2 \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + b^2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

5. На плоскости отмечено 444 точки, причем через любые 4 точки проходит график некоего квадратного трехчлена. Докажите, что все они лежат на графике одного квадратного трехчлена.
6. Докажите, что многочлен $R(x)$ положительной степени n не может принимать ровно 10 значений.
7. Даны многочлены P и Q степени больше нуля. Докажите, что если $Q(Q(x)) = P(P(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$, то $P(x) = Q(x)$.
8. Ваня придумал многочлен $P(x)$ степени 4.
 - (а) Назовем пару (x, y) испанской, если $P(x) = y, P(y) = x$. Андрей нашёл 5 испанских пар (все 10 чисел различны). Докажите, что найдется среди них

найдется хотя бы 2 пары с равной суммой.

(b) Назовем тройку (x, y, z) каталонской, если $P(x) = y, P(y) = z, P(z) = x$. Артём нашел 33 испанских тройки. Докажите, что среди них найдутся три с равной суммой.

9. Есть многочлен P степени 8, причем $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), \dots, P(4) = P(-4)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$.