

Многочлены. Теорема Безу.

Если это безумие, то в нем есть система.

Гамлет

Определение. Многочлен $P(x)$ **делится** на многочлен $Q(x)$, если существует многочлен $H(x)$ такой, что $P(x) = Q(x) \cdot H(x)$.

Определение. Многочлен $P(x)$ **делится** на многочлен $Q(x)$ **с остатком** $R(x)$, если существует многочлен $H(x)$ такой, что $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$ и степень $R(x)$ меньше степени $H(x)$.

Вопрос. Как быстро находить эти $H(x)$ и $R(x)$? Как неполное частное и остаток ищут чисел?

- Поделите с остатком многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ столбиком:
 - $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1, Q(x) = x - 1$
 - $P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 1, Q(x) = x^2 + x + 1;$
 - $P(x) = x^4 + 20x, Q(x) = x - 2.$
- Найдите все натуральные n , для которых число $4n^3 + 2n^2 + 4n + 7$ делится на $n + 1$.
- Найдите остаток многочлена $x^{2101} + x^{1852} + x^{1404} + x^{444} + x^6$ при делении на многочлен **(а)** $x - 1$; **(б)** $x^2 - 1$.
- (а) (Теорема Безу)** Докажите, что остаток многочлена $P(x)$ при делении на $(x - a)$ равен $P(a)$ (a – это число):

$$P(x) = (x - a)H(x) + P(a).$$

(б) Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)$ тогда и только тогда, когда a является корнем P , то есть $P(a) = 0$.

(с) Докажите, что если многочлен степени n со старшим коэффициентом b имеет корни a_1, \dots, a_n , то он представляется в виде

$$P(x) = b(x - a_1) \cdots \cdots (x - a_n)$$

- Найдите все a , при которых многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$?
 - $P(x) = x^{2093} + ax^{1228} + 3, Q(x) = x + 1;$ **(б)** $P(x) = x^n + ax^{n-2}, Q(x) = x - 2.$
- При каких a, b многочлен $x^5 - 3x^2 + ax + b$ делится на $(x - 1)(x - 2)$?
- Многочлен $x^4 + ax^3 + bx + c$ имеет 4 корня больше 0, но меньше 2. Докажите, что
 - свободный член $0 < c < 16;$ **(б)** $-2 < a + b + c < 0.$