

Многочлены. Начало.

Потом учитель сказал: – Хорошо, мальчики. Теперь я вижу: если вы сведете все ваши жизненные проблемы к полиномам, они будут решены. Хотя бы приближенно. . .

Стругацкие, «Полдень. XXII век»

Многочленом называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, где x – неизвестная (переменная), n – неотрицательное целое число, коэффициенты a_0, \dots, a_n – какие-то числа. У слова «многочлен» есть синоним – **полином**.

Число n называется **степенью** многочлена, обозначается как $\deg P$. Степень нулевого многочлена ($P(x) = 0$) считается $-\infty$.

Число $a_n \neq 0$ называется **старшим** коэффициентом многочлена, а a_0 – **свободным** коэффициентом.

1. Пусть степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равна 4 и 5, соответственно. Какова степень многочленов $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$, $P(Q(x))$?
2. Дан многочлен $P(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Найдите многочлен $P(x)$.
3. Андрей загадал некоторый многочлен P . Иван может попросить его посчитать значение P в любой точке a – то есть посчитать число $P(a)$. Помогите Ивану...
 - (a) узнать свободный член P ;
 - (b) узнать сумму коэффициентов многочлена P ;
 - (c) узнать сумму коэффициентов при четных степенях.
4. Докажите, что если привести многочлен $(x^3 - x^2 + 1)^{2020}$ к стандартному виду, то какой-то из коэффициентов будет отрицательным.
5. У многочленов P и Q все коэффициенты – целые нечетные числа (в частности, все $a_k \neq 0$, при $k \leq n$). Докажите, что их произведение $P \cdot Q$ содержит хотя бы один четный коэффициент.
6. Докажите, что любая натуральная степень многочлена $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x + 2$ имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.
7.
 - (a) Докажите, что если для многочлена Q выполнено $Q(y) = Q(-y)$ для любой точки y , то коэффициенты при **нечетных** степенях равны 0.
 - (b) Докажите, что если для многочлена Q выполнено $Q(y) = -Q(-y)$ для любой точки y , то коэффициенты при **четных** степенях равны 0.
8. Многочлен P и число $2a$ таковы, что для любого числа x верно равенство $P(x) = P(2a - x)$. Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $(x - a)^2$.